SÉRIE A
N° 4538
N° D'ORDRE
5385

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE GRISVARD

1re THÈSE. — COMMUTATIVITÉ DE DEUX FONCTEURS D'INTERPOLATION ET APPLICATIONS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 31 mai 1965 devant la Commission d'Examen.

MM. J. P. KAHANE — *Président.*
J. L. LIONS, F. BRUHAT — *Examinateurs.*
G. STAMPACCHIA — *Invité.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1966

SÉRIE A
N° 4538
N° D'ORDRE
5385

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE GRISVARD

1re THÈSE. — COMMUTATIVITÉ DE DEUX FONCTEURS D'INTERPOLATION ET APPLICATIONS.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 31 mai 1965 devant la Commission d'Examen.

MM. J. P. KAHANE — *Président.*
J. L. LIONS, F. BRUHAT — *Examinateurs.*
G. STAMPACCHIA — *Invité.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1966

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

BRELOT	T	Analyse supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des Êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E. N. S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
N	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
BOCQUET	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S. P. C. N.) et Sédimentologie (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS (R.)	T	Recherches physiques.
THOMAS (A.)	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P. C. B.).
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des Fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DU BREIL	T	Arithmétique et Théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie organique et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théorie physique.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
J.-P. MATHIEU	T	Physique optique.
COUTEAUX	T	Cytologie.
MAY	T	Zoologie.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des Solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (technique aéronaut.)
NORMANT	T	Synthèse organique.
BÉNARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ	T	Statistique mathématique.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végétale appliquée.
MARÉCHAL	T	Optique théorique et appliquée.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physiologie de la nutrition.
LELONG	T	Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS	T	Anatomie et histologie comparée.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie.
GODEMENT	T	Mathématiques (M. G. P.).
PISOT	T	Technique mathématique de la Physique.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMANN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Géologie générale.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique (M. G. P.).
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Électrotechnique générale.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PANNETIER	T	Chimie générale.
BRUN	T	Mécanique des Fluides (I).
LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay)
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG	T	Mathématiques II (E. N. S.).
BELLAIR	T	Géologie (S. P. C. N.).
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS (J. E.)	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie (E. N. S.).
MICHEL (A.)	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Énergétique générale.
ROUAULT	T	Électricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physiologie végétale.
CASTAING	T	Physique II thermodynamique (Orsay).
CURIEN	T	Minéralogie et Cristallographie.
MOYSE	T	Physiologie végétale (Orsay).
Mme CHARNIAUX-COTTON	T	Évolution des Êtres organisés.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
TONNELAT	T	Biologie physicochimique (Orsay).
VILLE	T	Économétrie.
WILLEMART	T	Chimie (P. C. B.).
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches physiques.

GUINOCHET	T	Biologie végétale (S. P. C. N.) (Orsay).
ROLLET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN	T	Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et Théorie des groupes.
ARNOULT	T	Électronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique I (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathématiques générales (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des Fluides.
LUCAS	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICARD	T	Météorologie physique de l'atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psychophysiologie.
FRIEDEL	T	Physique des Solides (Orsay).
M. JULIA	T	Études des moléculaires complexes.
LENDER	T	Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).
MAGAT	T	Physicochimique des radioéléments.
Mlle QUINTIN	T	Électrochimie.
MONOD	T	Chimie du métabolisme.
BENOIT	T	Physiologie animale (Orsay).
DE POSSEL	T	Analyse numérique.
CHARLOT	T	Chimie analytique.
LEMÉE	T	Écologie végétale (Orsay).
GUÉRIN	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).
CHATELET	T	Chimie (P. C. B.).
JEAN	T	Physiologie nucléaire (Orsay).
MATTLER	T	Physique (S. P. C. N.).
BERGERARD	T	Zoologie (Orsay).
BERTEIN	T	Électronique (Orsay).
BOUISSIÈRES	T	Radiochimie.
Mme COUTURE	T	Thermodynamique et Mécanique physique.
ELLEMBERGER	T	Géologie des grandes régions du Globe (Orsay).
FRANC	T	Biologie animale (P. C. B.).
SCHNELL		Botanique tropicale.
STLKOWSKI	T	Physiologie végétale.
ACHER	T	Chimie biologique.
BAUDOIN	T	Biologie animale (P. C. B.).
BEAUMONT		Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT		Géophysique de l'ionosphère.
BOUREAU	T	Botanique.
CURIE (D.)		Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA	T	Géologie.
FRÉON	T	Chimie organique (Orsay).
HELLER	T	Physiologie végétale.
TORTRAT	T	Calcul des probabilités.
CAILLEUX	T	Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN		Physique électricité.
DAUDEL	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la Chimie théorique et à la Physique nucléaire.
Mlle FOURCROY		Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT		Mécanique analytique et Mécanique céleste.
Mlle VEIL	T	Physiologie générale.
LWOFF	T	Microbiologie.
SIESTRUNCK	T	Mécanique physique et expérimentale.
LACOMBE	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
BROCHARD	T	Physique (P. C. B.) (Orsay).
CABANNES	T	Mécanique générale.
LESIEUR	T	Mathématiques I (Orsay).
MAZET	T	Mécanique générale (Orsay).
CAIRE		Géographie physique et géographie dynamique.
COMOLET		Mécanique des Fluides.
CORABŒUF	T	Physiologie animale (Orsay).
DELLOUE	T	Physique de l'exosphère.
GORENFLOT		Botanique II (Orsay).
HOUILLON		Biologie animale (P. C. B.).
JULLIEN (J.)		Chimie (S. P. C. N.) (Orsay).
MALGRANGE	T	Technique mathématique de la physique (Orsay).
OLIVIER		Anthropologie.
NOZERAN	T	Botanique II (Orsay).
BLANC-LAPIERRE	T	Physique (E. N. S.) (Orsay).
CHEVAUGEON	T	Botanique (Orsay).
KAHANE	T	Mathématiques (Orsay).
SAMUEL	T	Mathématiques (E. N. S.) féminines.
KOURGANOFF	T	Astronomie (Orsay).
THIRY	T	Mécanique céleste.
ABELÈS		Physique (S. P. C. N.).
AMAT	T	Physique (P. C. B.).
AUBOIN	T	Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
BOUGIS		Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
BRUHAT	T	Mathématiques (M. P. C.).
BRUNN	T	Géologie historique (Orsay).
CHABBAL	T	Physique (M. G. P.) (Orsay).
DEHEUVELS	T	Mathématiques propédeutiques.
D'ESPAGNAT	T	Physique théorique (Orsay).
FURON	T	Géologie (S. P. C. N.).
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVÈS		Biologie végétale (P. C. B.).
GUILBERT		Physique (C. U. S.) (Orléans).
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie (P. C. B.).
MEYER		Physique propédeutique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER		Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des Fluides.
ROUBINE		Électronique.
SILBER	T	Chimie (P. C. B.).
UEBERSFELD	T	Électronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
NÉRON	T	Mathématiques (M. P. C.) (Orsay).
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M. P. C.).
LE CORRE	T	Électricité.
DELCROIX	T	Physique théorique (Orsay).
GOURDIN		Physique théorique des Hautes Énergies (Orsay).
LEHMANN	T	Physique expérimentale des Hautes énergies.
NATAF	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
ÉCHALIER		Biologie animale (P. C. B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
LIORET		Physiologie végétale (Orsay).
DARS		Géologie structurale et Géologie appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (Agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique (Orsay).
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U.) (Orléans).
MALLIAVIN	T	Mathématique propédeutique (Orsay).
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
PEREZ Y JORBA		Physique expérimentale des Hautes énergies (Orsay).
DAVID	T	Chimie (Agrégation) (Orsay).
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Mathématiques (M. P. C.).
MOREL (PIERRE)		Physique (M. P. C.).
ARSAC		Programmation.
LEFEBVRE		Chimie (M. P. C.).
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique (C. P. E. M.).
RIO		Chimie (C. P. E. M.).
JAUZEIN		Géologie (E. N. S.).
PRÉVOST (GEORGES)		B. V. (C. P. E. M.).
FAVARD (P.)		B. A. (C. P. E. M.).
VILKAS		Chimie (C. P. E. M.).
Mlle FICINI		Chimie (C. P. E. M.).
LEQUEUX		Astronomie.
COHEN-TANNOUDJI		Physique (M. P. C.).
TAVERNIER		Physique (C. P. E. M.).

Mme ROIZEN.....	Physique (C. P. E. M.).
DURAND (M.).....	B. A. (S. P. C. N.).
PASCAUD.....	Physiologie.
Mme PETIT.....	B. A. (C. P. E. M.).
BROUSSE.....	Géologie (Orsay).
CAGNIAC.....	Physique (Agrégation) (Orsay).
LEBERRE.....	Zoologie (Orsay).
SCHEFFER.....	Microbiologie (Orsay).
DE GENNES.....	Physique des Solides (Orsay).
RIOU.....	Physique nucléaire expérimentale (Orsay).
CLAUSER.....	Chimie biologique (Orsay).
CHEVALLIER.....	Physiologie animale (Orsay).
JANCOVICI.....	Physique atomique (Orsay).
FALK-VAIRANT.....	Physique nucléaire (Orsay).
FETIZON.....	Chimie propédeutique (Orsay).
CERF.....	Mathématiques (Orsay).

Secrétaire général..... R. POULLAIN

COMMUTATIVITÉ DE DEUX FONCTEURS D'INTERPOLATION ET APPLICATIONS ;

PAR PIERRE **GRISVARD**.

INTRODUCTION.

Ce travail est divisé en deux parties : Le chapitre I, où l'on étudie les propriétés de commutativité de certains foncteurs d'interpolation et le chapitre II, où sont résolus divers problèmes de traces pour des espaces de fonctions de plusieurs variables et des espaces de fonctions définis par interpolation.

Les questions traitées dans les deux chapitres sont différentes mais liées par l'analogie des méthodes employées.

Rappelons brièvement la définition des deux procédés d'interpolation que nous utiliserons (un résumé des principaux résultats de la théorie de l'interpolation est fait au chapitre 0). Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach contenus avec injections continues dans un même espace localement convexe séparé $\mathfrak{A}$. On appelle « espaces d'interpolation réels » entre A_0 et A_1 les espaces $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ définis pour $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ comme suit : $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ est l'espace décrit par $a = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t}$ lorsque u varie en remplissant les conditions suivantes :

1° $t \mapsto u(t)$ est fortement mesurable à valeurs dans $A_0 \cap A_1$;

2° $$\int_0^{+\infty} \| t^\theta u(t) \|_{A_0}^p \frac{dt}{t} < +\infty ;$$

3° $$\int_0^{+\infty} \| t^{\theta-1} u(t) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty .$$

On appelle «espaces d'interpolation complexes» entre A_0 et A_1 les espaces $[A_0, A_1]_\theta$ définis pour $0 < \theta < 1$ de la manière suivante : $[A_0, A_1]_\theta$ est l'espace décrit par $a = f(\theta)$ lorsque f varie en satisfaisant à

1° $\xi \to f(\xi)$ est continue et bornée dans $0 \leq \mathrm{Re}\,\xi \leq 1$ et holomorphe dans $0 < \mathrm{Re}\,\xi < 1$ à valeurs dans $A_0 + A_1$;

2° $$\max_{-\infty<y<+\infty} \| f(iy) \|_{A_0} < +\infty ;$$

3° $$\max_{-\infty<y<+\infty} \| f(1+iy) \|_{A_1} < +\infty .$$

Tous les espaces ainsi construits ont en commun la propriété d'interpolation : Si B_0, B_1 est un second couple d'espaces de Banach, analogue au couple A_0, A_1 et si π est un opérateur linéaire continu de $A_0 + A_1$ dans $B_0 + B_1$, qui applique A_i dans B_i, $i = 0, 1$, alors π applique continûment $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ dans $(B_0, B_1)_{\theta,p}$ et $[A_0, A_1]_\theta$ dans $[B_0, B_1]_\theta$.

Nous étudions en premier lieu le problème de la commutativité entre les deux méthodes d'interpolation qu'on vient de rappeler : Si A_0, A_1, A_2, A_3 sont quatre espaces de Banach, contenus avec injections continues dans $\mathfrak{A}$, on cherche les relations entre les espaces

$$[(A_0, A_1)_{\alpha,p} ; (A_2, A_3)_{\beta,q}]_\theta$$

et

$$([A_0, A_2]_\theta ; [A_1, A_3]_\theta)_{\gamma,r} ;$$

en particulier on cherche si ces deux espaces peuvent coïncider pour certaines valeurs des divers paramètres. La recherche de telles identités fait l'objet du chapitre I. Comme applications de nos résultats nous retrouvons sous une forme plus générale les théorèmes d'interpolation de G. Stampacchia [31] et S. Campanato [2] qui sont utiles en théorie du potentiel. D'ailleurs notre premier but en écrivant ce chapitre fut de faire résulter le théorème de [31] des méthodes générales de l'interpolation. D'autres applications de ce chapitre, seront faites dans un article séparé à paraître sur certains problèmes aux limites pour les équations paraboliques.

Le chapitre II est consacré à l'étude des traces de diverses classes de fonctions : Si W est un espace de fonctions définies dans $\mathbf{R}^n$, on détermine l'espace décrit par les restriction (qu'on appelle « traces ») à Γ sous-espace de dimension $\leq n-1$ de $\mathbf{R}^n$, des fonctions de W, lorsqu'il est possible de définir de telles restrictions. Au paragraphe 1 nous considérons le cas où W est un espace défini par interpolation à partir d'espaces fonctionnels sur $\mathbf{R}^n$ et où Γ est de dimension $n-1$. Nos résultats contiennent comme cas particuliers des théorèmes de traces de S. V. Uspenkiĭ [35], E. M. Stein [32] et S. M. Nikolskiĭ [23] qui sont ainsi unifiés. Au paragraphe 2 nous étudions le cas où Γ est de dimension $<n-1$; nous précisons également les conditions de « compatibilité » entre les traces d'une même fonction sur divers sous-espaces. Une partie des résultats de ce paragraphe 2 a été utilisée par M. Pagni [26] pour l'étude du problème de Dirichlet pour les opérateurs quasi elliptiques et dans J. L. Lions [17]. Le paragraphe 1 de ce chapitre II utilise systématiquement les résultats du chapitre I, le paragraphe 2 en est indépendant.

Les méthodes du chapitre II peuvent être utilisées pour étudier les traces d'autres espaces fonctionnels définis par des conditions de Hölder, voisins de ceux introduits ici; nous détaillerons ce point dans un article séparé pour ne pas alourdir outre mesure le présent travail.

Certains de nos résultats ont été annoncés dans des Notes aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [6], et exposés partiellement à l'Université de Pise. D'autres résultats que nous avons publiés dans ([4], [5]) nous sont utiles dans le présent travail.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma gratitude envers M. J. L. Lions à qui je dois une grande partie de ma formation mathématique et dont les conseils et les encouragements constants m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je remercie aussi M. G. Stampacchia pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mes recherches.

Je remercie également MM. F. Bruhat et J. P. Kahane qui ont accepté de former avec MM. J. L. Lions et G. Stampacchia, le jury auquel est soumis cette thèse.

CHAPITRE 0.

Rappel des principaux résultats de l'interpolation.

1. Les procédés d'interpolation réels et complexes.

1.1. On appelle couple d'interpolation, un couple d'espaces de Banach, (A_0, A_1) tel qu'il existe un espace vectoriel topologique séparé $\mathfrak{A}$ avec $A_i \subset \mathfrak{A}$ avec injections continues, $i = 0, 1$ (1).

Pour $1 \leq p_i < +\infty$, on désigne par $L^{p_i}_*(A_i)$ l'espace des fonctions $t \mapsto u(t)$ définies pour $t > 0$, fortement mesurables à valeurs dans A_i et telles que

$$\| u \|_{L^{p_i}_*(A_i)} = \left(\int_0^{+\infty} \| u(t) \|^{p_i}_{A_i} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p_i}} < +\infty .$$

Pour $1 \leq p_i \leq +\infty$, ξ_i réels, $i = 0, 1$ avec $\xi_0 \xi_1 < 0$, on désigne par $W_*(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$ l'espace des fonctions $t \mapsto u(t)$ définies pour $t > 0$, à valeurs dans $A_0 \cap A_1$ et telles que

$$t^{\xi_0} u(t) \in L^{p_0}_*(A_0), \qquad t^{\xi_1} u(t) \in L^{p_1}_*(A_1) ;$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$u \to \| t^{\xi_0} u(t) \|_{L^{p_0}_*(A_0)} + \| t^{\xi_1} u(t) \|_{L^{p_1}_*(A_1)} .$$

Définition ([19]). — *On désigne par* $S(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$ *l'espace décrit par* $a = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t}$ *lorsque* u *parcourt l'espace* $W_*(p_0, \xi_0, A_0 ; p_1, \xi_1, A_1)$.

---

(1) De manière générale, dans tout ce travail, on écrit $X \subset Y$ pour deux espaces de Banach X et Y lorsque X est contenu dans Y algébriquement, l'injection de X dans Y étant continue; on écrit $X = Y$ lorsque X et Y coïncident algébriquement et ont des normes *équivalentes* (mais non nécessairement égales).

C'est un espace de Banach, dit « espace d'interpolation réel » (introduit dans [19]) pour la norme

$$a \to \inf \{ \| t^{\xi_0} u(t) \|_{L^{p_0}(A_0)} + \| t^{\xi_1} u(t) \|_{L^{p_1}(A_1)} \},$$

le inf étant pris par rapport aux fonctions

$$u \in W_*(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) \qquad \text{telles que} \qquad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}.$$

1.2. Le premier résultat important est le

Théorème d'équivalence ([27]). — *Lorsque*

$$\frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1} = \frac{\eta_0}{\eta_0 - \eta_1} = \theta \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} = \frac{1}{p},$$

on a

$$S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = S(q_0, \eta_0, A_0; q_1, \eta_1, A_1).$$

Ce théorème montre que l'espace $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1)$ ne dépend, à une équivalence de norme près, que des paramètres θ et p; nous le noterons $(A_0, A_1)_{\theta, p}$. Par conséquent nous avons l'identité $S(p_0, \xi_0, A_0; p_1, \xi_1, A_1) = (A_0, A_1)_{\theta, p}$ pour

$$\theta = \frac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

1.3. La propriété fondamentale des espaces $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ est le

Théorème d'interpolation ([19]). — *Soient* (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *deux couples d'interpolation, et soit* π *un opérateur linéaire continu de* $A_0 + A_1$ *dans* $B_0 + B_1$, *dont la restriction à* A_i *est linéaire continue de* A_i *dans* B_i, $i = 0, 1$, *alors la restriction de* π *à* $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ *est linéaire continue de* $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ *dans* $(B_0, B_1)_{\theta, p}$ *pour tout* $\theta \in]0, 1[$ *et tout* $p \in [1, \infty]$.

1.4. On peut préciser les relations entre les espaces $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ lorsque θ et p varient :

Pour $p \leq q$ on a $(A_0, A_1)_{\theta, p} \subset (A_0, A_1)_{\theta, q}$; et si de plus $A_0 \subset A_1$, alors on a $(A_0, A_1)_{\theta, q} \subset (A_0, A_1)_{t, q}$ pour $t > \theta$ et quels que soient p et q.

La première de ces propriétés justifie qu'on pose la

Définition ([19]). — *Un espace de Banach* X *est dit de classe* $\mathcal{K}_\theta(A_0, A_1)$ *si l'on a la double inclusion*

$$(A_0, A_1)_{\theta,1} \subset X \subset (A_0, A_1)_{\theta,\infty} \ (^2).$$

La seconde propriété fondamentale de l'interpolation réelle s'énonce :

Théorème de réitération ([19]). — *Soit* X *un espace de classe* $\mathcal{K}_{\theta'}(A_0, A_1)$ *et* Y *un espace de classe* $\mathcal{K}_{\theta''}(A_0, A_1)$, *alors on a*

$$(X, Y)_{\theta,p} = (A_0, A_1)_{(1-\theta)\theta'+\theta\theta'',p}$$

pour $0 \leq \theta' \leq \theta'' \leq 1$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$.

1.5. Terminons l'énumération des propriétés des espaces d'interpolation réels, que nous aurons à utiliser par le

Théorème de densité ([19]). — *Pour* $1 \leq p < +\infty$, $A_0 \cap A_1$ *est dense dans* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$, *pour* $0 < \theta < 1$.

1.6. Il existe de nombreuses définitions équivalentes des espaces d'interpolation réels; parmi ces définitions deux nous seront utiles :

$(A_0, A_1)_{\theta,p}$ est l'espace des $a \in A_0 + A_1$, qui pour tout $t > 0$ peuvent s'écrire sous la forme

$$a = u(t) + v(t),$$

avec

$$t^{\xi_0} u(t) \in L^{p_0}_*(A_0), \qquad t^{\xi_1} v(t) \in L^{p_1}_*(A_1)$$

$\left(\theta = \dfrac{\xi_0}{\xi_0 - \xi_1}, \dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}\right)$; la topologie de $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ est définie par la norme

$$a \to \inf \left\{ \| t^{\xi_0} u(t) \|_{L^{p_0}_*(A_0)} + \| t^{\xi_1} v(t) \|_{L^{p_1}_*(A_1)} \right\},$$

le inf étant pris par rapport aux couples de fonctions u, v, vérifiant (1.1) et (1.2).

---

(2) On convient d'écrire $A_0 \in \mathcal{K}_0(A_0, A_1)$ et $A_1 \in \mathcal{K}_1(A_0, A_1)$.

Enfin soit $L^{p_i}_{\alpha_i}(A_i)$ l'espace des fonctions $t \to u(t)$ définies pour $t > 0$, fortement mesurables à valeurs dans A_i et telles que

$$\| u \|_{L^{p_i}_{\alpha_i}(A_i)} = \left(\int_0^{+\infty} \| t^{\alpha_i} u(t) \|^{p_i}_{A_i} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p_i}} < +\infty ;$$

Pour m entier > 0, j entier ≥ 0, $1 \leq p_i \leq \infty$, α_i réel $i = 0, 1$ et

$$\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + j > 0, \qquad \alpha_1 + \frac{1}{p_1} + j < m,$$

on désigne par $T^{(m)}_j(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ l'espace décrit par $a = u^{(j)}(0)$ lorsque u parcourt l'espace $W^{(m)}(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ i.e. varie en satisfaisant à $u \in L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0)$, $u^{(m)} \in L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)$ (la dérivée étant prise au sens des distributions). $T^{(m)}_j$ est un espace de Banach pour la norme

$$a \to \inf \left\{ \| u \|_{L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0)} + \| u^{(m)} \|_{L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)} \right\},$$

le inf étant pris par rapport aux $u \in W^{(m)}$ telles que $u^{(j)}(0) = a$; ces espaces (de « traces ») ont été introduits dans ([14], [19]). On a le

Théorème de traces ([19]), ([5]). — *Pour*

$$\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + j > 0, \qquad \alpha_1 + \frac{1}{p_1} + j < m,$$

on a

$$T^{(m)}_j(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) = (A_0, A_1)_{\theta, p},$$

avec

$$\theta = \frac{\alpha_0 + \frac{1}{p_0} + j}{\alpha_0 - \alpha_1 + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} + m} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

1.7. On désigne par $\mathcal{H}(A_0, A_1)$ l'espace des fonctions $\zeta \to f(\zeta)$ définies dans $0 \leq \mathrm{Re}\,\zeta \leq 1$, continues bornées à valeurs dans $A_0 + A_1$, holomorphes dans $0 < \mathrm{Re}\,\zeta < 1$ à valeurs dans $A_0 + A_1$ et telles que

$$f(it) \in L^\infty(A_0), \qquad f(1 + it) \in L^\infty(A_1),$$

où $L^\infty(A_i)$ désigne l'espace des fonctions mesurables et bornées à valeurs dans A_i, dans $(-\infty, +\infty)$. $\mathcal{H}(A_0, A_1)$ est un espace de Banach pour la norme

$$f \to \|f(it)\|_{L^\infty(A_0)} + \|f(1+it)\|_{L^\infty(A_1)}.$$

Définition ([1], [11], [12]). — *On désigne par* $[A_0, A_1]_\theta$ *l'espace décrit par* $f(\theta)$ *lorsque* f *parcourt* $\mathcal{H}(A_0, A_1)$, $(0 < \theta < 1)$.

C'est un espace de Banach, dit « espace d'interpolation complexe » pour la norme

$$a \to \inf \{ \|f(it)\|_{L^\infty(A_0)} + \|f(1+it)\|_{L^\infty(A_1)} \},$$

le inf étant pris par rapport aux fonctions $f \in \mathcal{H}(A_0, A_1)$ telles que $f(\theta) = a$.

1.8. Les propriétés essentielles de ces espaces sont les suivantes :

Théorème d'interpolation ([1], [12]). — *Soient* (A_0, A_1) *et* (B_0, B_1) *deux couples d'interpolation et soit* π *un opérateur linéaire continu de* $A_0 + A_1$ *dans* $B_0 + B_1$, *qui par restriction, opère de* A_i *dans* B_i $(i = 0, 1)$, *alors la restriction de* π *à* $[A_0, A_1]_\theta$ *est linéaire continue de* $[A_0, A_1]_\theta$ *dans* $[B_0, B_1]_\theta$ $(0 < \theta < 1)$.

Lorsque $A_0 \subset A_1$, on a $[A_0, A_1]_\theta \subset [A_0, A_1]_t$ pour $t > \theta$;

Théorème ([19]). — *Pour* $0 < \theta < 1$, $[A_0, A_1]_\theta \in \mathcal{K}_\theta(A_0, A_1)$.

2. L'interpolation dans les espaces de Lebesgue, de Lorentz et de Sobolev.

2.1. Considérons toujours un couple d'interpolation (A_0, A_1), et soit Ω un espace localement compact, $d\omega$ une mesure de Radon positive sur Ω et ρ_i une fonction localement ω sommable dans Ω; nous notons $L^{p_i}_{\rho_i}(\Omega; A_i)$ l'espace des fonctions u définies dans Ω à valeurs dans A_i, fortement mesurables et telles que

$$\left(\int_\Omega \| \rho_i u \|^{p_i}_{A_i} \, d\omega \right)^{\frac{1}{p_i}} < +\infty.$$

On a alors le

THÉORÈME ([19] *et* [1]). — *On a les identités*

$$\left(L^{p_0}_{\rho_0}(\Omega; A_0); L^{p_1}_{\rho_1}(\Omega; A_1)\right)_{\theta,p} = L^{p}_{\rho}(\Omega; (A_0, A_1)_{\theta,p})$$

pour

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad avec \qquad \rho = \rho_0^{1-\theta}\rho_1^{\theta},$$

et

$$\left[L^{p_0}_{\rho_0}(\Omega; A_0); L^{p_1}_{\rho_1}(\Omega; A_1)\right]_{\theta} = L^{p}_{\rho}(\Omega; [A_0, A_1]_{\theta}).$$

C'est une généralisation du classique théorème de M. Riesz et G. O. Thorin ([29] et [34]).

On a en particulier

$$\left(L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0), L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)\right)_{\theta,p} = L^{p}_{\alpha}((A_0, A_1)_{\theta,p}) \tag{2.1}$$

et

$$\left[L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0), L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)\right]_{\theta} = L^{p}_{\alpha}([A_0, A_1]_{\theta}) \tag{2.2}$$

pour

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1.$$

2.2. On désigne par $M^{\sigma}(\Omega)$ l'espace des fonctions u ω-mesurables dans Ω à valeurs complexes telles que

$$\|u\|_{M^{\sigma}(\Omega)} = \max_{\varepsilon} \frac{\int_{\varepsilon} |u|\, d\omega}{\left(\int_{\varepsilon} d\omega\right)^{\sigma}} < +\infty,$$

le maximum étant pris par rapport aux ensembles $\varepsilon \subset \Omega$, et ω-intégrables, pour $0 < \sigma < 1$. $M^{\sigma}(\Omega)$ est un espace de Lorentz [21], et l'on a le

THÉORÈME ([19]). — *On a les identités*

$$(M^{\sigma_0}(\Omega), M^{\sigma_1}(\Omega))_{\theta,p} = L^{p}(\Omega)$$

pour

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{p_i} = 1 - \sigma_i \quad (i = 0, 1), \ \sigma_0 \neq \sigma_1$$

et

$$(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))_{\theta,\ldots} = M^{\sigma}(\Omega)$$

pour

$$\sigma = 1 - \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad p_0 \neq p_1.$$

[dans cet énoncé, $L^{p_i}(\Omega)$ signifie $L^{p_i}_1(\Omega; \mathbf{C})$].

La première identité correspond au théorème de Marcinkievicz [36].

2.3. Pour Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$, on désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions définies dans Ω et dont les dérivées d'ordre $\leq m$ au sens des distributions sont dans $L^p(\Omega)$ (espace des fonctions scalaires mesurables et de puissance p sommable pour la mesure de Lebesgue dans Ω); $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^{\alpha} u \|_{L^p(\Omega)} \qquad (m \geq 0,\ 1 \leq p \leq +\infty),$$

$W^{-m,p}(\Omega)$ désigne l'espace des distributions dans Ω, qui sont combinaisons linéaires de dérivées d'ordre $\leq m$ de fonctions de $L^p(\Omega)$; $W^{-m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$T \mapsto \inf \sum_{\alpha \leq m} \| f_{\alpha} \|_{L^p(\Omega)},$$

le inf étant pris par rapport à toutes les familles possibles de fonctions $f_{\alpha} \in L^p(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ telles que

$$T = \sum_{\alpha \leq m} D^{\alpha} f_{\alpha}.$$

Ces espaces sont les espaces de Sobolev; par interpolation on en déduit d'autres espaces :

Définition ([1], [17], [18]) :

1° *Pour s non entier de signe quelconque, $(m < s < m+1)$ $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, on pose*

$$B^{s,p}_{q}(\Omega) = (W^{m-1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))_{\theta,q},$$
$$H^{s,p}(\Omega) = [W^{m-1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega)]_{\theta},$$

avec θ tel que $s = m + 1 - \theta$.

2° *Pour s entier de signe quelconque $(s=m)$ $1\leq p\leq+\infty$, $1\leq q\leq+\infty$, on pose*

$$B_q^{s,p}(\Omega)=(W^{m+1,p}(\Omega),\ W^{m-1,p}(\Omega))_{\frac{1}{2},q}.$$

Selon l'usage, on écrit $W^{s,p}(\Omega)=B_p^{s,p}(\Omega)$, pour s non entier, et $H^{s,p}(\Omega)=W^{s,p}(\Omega)$ pour s entier.

2.4. On peut expliciter les espaces B et H introduits ci-dessus, dans de nombreux cas.

Supposons pour commencer que $\Omega=\mathbf{R}^n$:

D'après ([18], [19]), $B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ est pour $s>0$ non entier $(m<s<m+1)$ et $1<p<\infty$, le sous-espace de $W^{m,p}(\mathrm{R}^n)$ formé des fonctions u, telles que

$$\int_0^{+\infty} t^{-(s-m)q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\,\mathrm{D}^\alpha u(x_1,\ \ldots,\ x_i+t,\ \ldots,\ x_n)\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{D}^\alpha u(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)\,|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}<+\infty$$

pour $|\alpha|=m$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Ensuite pour $s>0$ entier $(s=m)$ et $1<p<\infty$, $B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ est le sous-espace de $W^{m-1,p}(\mathbf{R}^n)$ formé des fonctions u, telles que

$$\int_0^{+\infty} t^{-q}\left(\int_{\mathbf{R}^n}|\,\mathrm{D}^\alpha u(x_1,\ \ldots,\ x_i+t,\ \ldots,\ x_n)\right.$$
$$+\,\mathrm{D}^\alpha u(x_1,\ \ldots,\ x_i-t,\ \ldots,\ x_n)$$
$$\left.-\,2\,\mathrm{D}^\alpha u(x_1,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_n)\,|^p\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\frac{dt}{t}<+\infty$$

pour $|\alpha|=m-1$, $i=1,\ 2,\ \ldots\ n$ (3).

D'après ([1], [18]), $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ est pour s réel de signe quelconque et $1<p<+\infty$, l'espace des distributions tempérées u telles que

$$\overline{\mathcal{F}}(1+|\,\zeta\,|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}u\in L^p(\mathbf{R}^n).$$

($\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier et $\overline{\mathcal{F}}=\mathcal{F}^{-1}$.)

---

(3) On voit donc que l'espace $B_p^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ [resp. $B_2^{s,p}(\mathbf{R}^n)$] introduit ici est l'espace noté $B_p^{(s)}(\mathbf{R}^n)$ [resp. $H_p^{(s)}(\mathbf{R}^n)$] dans ([23], [35]).

2.5. Supposons à présent que Ω soit un ouvert « assez régulier » de $\mathbf{R}^n$, (i. e. par exemple un ouvert borné de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ sous-variété différentiable de dimension $n-1$, dans $\mathbf{R}^n$, Ω étant d'un seul côté de Γ), alors d'après [18], $B_q^{s,p}(\Omega)$ [resp. $H^{s,p}(\Omega)$] est l'espace des restrictions à Ω des distributions de $B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ [resp. $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$].

2.6. Enfin si V désigne une variété différentiable de dimension n, compacte, on peut définir les espaces $W^{s,p}(V)$, $H^{s,p}(V)$ et $B_q^{s,p}(V)$, par cartes locales et partition de l'unité, à partir des espaces « modèles » $W^{s,p}(\mathbf{R}^n)$, $H^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ et $B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ respectivement (*cf.* par exemple [18]).

CHAPITRE I.

Commutativité des procédés d'interpolation réels et complexes.

1. Introduction. — Parmi les propriétés fonctorielles des procédés d'interpolation réel et complexe, on peut se proposer d'étudier la propriété suivante : Les deux procédés indiqués sont-ils commutatifs? Plus précisément étant donnés quatre espaces de Banach A_0, A_1, B_0, B_1 contenus avec injections continues dans un même espace vectoriel topologique localement convexe séparé $\mathfrak{A}$, quelles sont les relations entre les deux espaces :

$$[(A_0, A_1)_{\alpha,p}; (B_0, B_1)_{\beta,q}]_\theta$$

et

$$([A_0, B_0]_\theta, [A_1, B_1]_\theta)_{\gamma,r}?$$

En particulier, peut-il arriver que ces deux espaces coïncident pour des valeurs correctes des divers paramètres?

Évidemment, on peut poser le même problème pour les espaces

$$((A_0, A_1)_{\alpha,p}; (B_0, B_1)_{\beta,q})_{\theta,\rho}$$

et

$$((A_0, B_0)_{\theta,\rho}; (A_1, B_1)_{\theta,\rho})_{\gamma,r}.$$

L'étude de ce problème est le point de départ de ce chapitre. Nous donnons au n° 2, un critère abstrait permettant d'affirmer

l'identité des espaces ci-dessus pour des valeurs convenables des paramètres.

La recherche de situations concrètes dans lesquelles les critères du numéro 2 sont vérifiés, nous a amenés à utiliser une nouvelle classe d'opérateurs linéaires non bornés dans les espaces de Banach. Cette classe est introduite au numéro 3 et est définie par une condition sur le spectre des opérateurs considérés; elle est plus générale que la classe des générateurs infinitésimaux de semi-groupes continus d'opérateurs, habituellement utilisée dans l'étude de ce genre de problèmes. Les résultats d'interpolation connus dans le cas des générateurs infinitésimaux (i. e. notamment la caractérisation explicite des espaces intermédiaires entre l'espace de Banach E et le domaine d'une puissance de l'opérateur, supposé opérant dans E) s'étendent facilement aux opérateurs considérés ici; ceci est fait au numéro 3 dans le cas d'un opérateur et aux numéro 7 et 8 dans le cas de plusieurs opérateurs commutatifs.

L'application des critères du numéros 2 dans les situations concrètes fournies par le numéro 3 est faite au numéro 4.

Nous donnons dans les numéros 5, 6, 9 et 10 de nombreuses applications de nos résultats : On démontrera notamment de nouveaux théorèmes d'interpolation dans les espaces de Sobolev d'exposants non entiers et l'on retrouvera comme cas particuliers d'un théorème abstrait, le principaux résultats de G. Stampacchia [31] et S. Campanato [2] sur l'interpolation entre les espaces L^p de Lebesgue et les espaces de fonctions höldériennes. D'autres applications de ces résultats seront données au chapitre II.

2. Un critère de commutativité.

2.1. On donne quatre espaces de Banach A_0, A_1, B_0, B_1 comme ci-dessus; on pose

$$A_\theta = [A_0, A_1]_\theta, \qquad B_\theta = [B_0, B_1]_\theta.$$

On pose $S_i = (A_i, B_i)_{t_i, p_i}$, c'est l'image par

$$u \mapsto \int_0^{+\infty} u(t)\,\frac{dt}{t}$$

de l'espace

$$W_*(p_i, \zeta_i, A_i; p_i, \zeta_i, B_i) = W_*^i,$$

$$t_i = \frac{\zeta_i}{\zeta_i - \zeta_i} \in]0, 1[, \qquad 1 \leq p_i \leq +\infty \qquad (i = 0, \theta, 1).$$

Avec ces notations on a le

THÉORÈME 2.1. — *On suppose qu'il existe un opérateur linéaire continu* $R : \mathfrak{A} \to L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; \mathfrak{A})$ (4) *dont la restriction à* S_i *est linéaire continue de* S_i *dans* W_*^i $(i = 0, 1)$ *et tel que pour* $a \in S_0 + S_1$, $u = R.a$, *on ait*

$$a = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t}.$$

On a alors l'inclusion $[S_0, S_1]_\theta \subset S_0$, *avec*

$$\zeta_0 = (1 - \theta)\zeta_0 + \theta\zeta_1, \qquad \zeta_\theta = (1 - \theta)\zeta_0 + \theta\zeta_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Démonstration. — Pour $a \in [S_0, S_1]_\theta \subset S_0 + S_1$ on a $a = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t}$, avec $u = Ra$; par interpolation on a $u \in [W_*^0, W_*^1]_\theta$, d'où évidemment

$$u \in \left[L^{p_0}_{\zeta_0 - \frac{1}{p_0}}(A_0); L^{p_1}_{\zeta_1 - \frac{1}{p_1}}(A_1) \right]_\theta$$

et

$$u \in \left[L^{p_0}_{\zeta_0 - \frac{1}{p_0}}(B_0); L^{p_1}_{\zeta_1 - \frac{1}{p_1}}(B_1) \right]_\theta,$$

i. e., d'après [1] (*cf.* chap. 0, n° 2, point 2.1),

$$u \in L^{p_\theta}_{\zeta_\theta - \frac{1}{p_\theta}}(A_\theta) \qquad \text{et} \qquad u \in L^{p_\theta}_{\zeta_\theta - \frac{1}{p_\theta}}(B_\theta),$$

et par conséquent on a $u \in W_*^\theta$, d'où $a \in S_\theta$.

2.2. On va donner un énoncé « dual » du précédent.

---

(4) On peut toujours se réduire au cas où $\mathfrak{A}$ est un espace de Banach (en remplaçant éventuellement $\mathfrak{A}$ par $A_0 + B_0 + A_1 + B_1$, par exemple); $L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; \mathfrak{A})$ désigne alors l'espace des fonctions définies dans $\mathbf{R}_+$ fortement mesurables à valeurs dans $\mathfrak{A}$ et localement sommables dans $\mathbf{R}_+$.

On pose

$$L_i = L^{p_i}_{\xi_i - \frac{1}{p_i}}(A_i) + L^{p_i}_{\zeta_i - \frac{1}{p_i}}(B_i) \qquad (i = 0, 0, 1).$$

Avec ces notations on a le

THÉORÈME 2.2. — *On suppose qu'il existe un opérateur linéaire continu* $\sum : L_0 + L_1 \to \mathfrak{A}$ *dont la restriction à* L_i *est linéaire continue de* L_i *dans* S_i $(i = 0,1)$, *et tel que pour* $a \in S_0$ *on ait* $\sum u = a$, *pour* $u(t) \equiv a$. *On a alors l'inclusion*

$$S_0 \subset [S_0, S_1]_0$$

avec

$$\xi_0 = (1-0)\xi_0 + 0\xi_1, \qquad \zeta_0 = (1-0)\zeta_0 + 0\zeta_1, \qquad \frac{1}{p_0} = \frac{1-0}{p_0} + \frac{0}{p_1}.$$

Démonstration. — Pour $a \in S_0$, on a

$$a = v_0(t) + v_1(t) \quad \text{p. p.}$$

avec

$$v_0 \in L^{p_0}_{\xi_0 - \frac{1}{p_0}}(A_0) = \left[L^{p_0}_{\xi_0 - \frac{1}{p_0}}(A_0) ; L^{p_1}_{\xi_1 - \frac{1}{p_1}}(A_1) \right]_0 \subset [L_0, L_1]_0$$

et

$$v_1 \in L^{p_0}_{\zeta_0 - \frac{1}{p_0}}(B_0) = \left[L^{p_0}_{\zeta_0 - \frac{1}{p_0}}(B_0) ; L^{p_1}_{\zeta_1 - \frac{1}{p_1}}(B_1) \right]_0 \subset [L_0, L_1]_0.$$

Par conséquent, la fonction $u(t) = a$ est élément de $[L_0, L_1]_0$; et comme $a = \sum u$ on a par interpolation $a \in [S_0, S_1]_0$.

Remarque 2.1. — En réunissant les hypothèses des théorèmes 2.1 et 2.2 on obtient une condition *suffisante* pour que l'identité $[S_0, S_1]_0 = S_0$ ait lieu.

2.3. Les démonstrations des deux théorèmes précédents utilisent essentiellement les identités du type

$$[L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0), L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1)]_0 = L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0),$$

avec

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-0}{p_0} + \frac{0}{p_1}, \qquad \alpha_0 = (1-0)\alpha_0 + 0\alpha_1.$$

On obtiendra par la même méthode des résultats analogues où l'interpolation complexe est remplacée par l'interpolation réelle en utilisant les identités du type (*voir* [19], chap. o n° 2.1)

$$(L^{p_0}_{\alpha_0}(A_0),\ L^{p_1}_{\alpha_1}(A_1))_{\theta,p_0} = L^{p_0}_{\alpha_0}((A_0, A_1)_{\theta,p_0}).$$

Nous énonçons simplement les résultats :

Théorème 2.1′. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1 *on a l'inclusion*

$$(S_0, S_1)_{\theta,p_0} \subset \big((A_0, A_1)_{\theta,p_0};\ (B_0, B_1)_{\theta,p_0}\big)_{t_0,p_0}$$

Théorème 2.2′. — *Sous les hypothèses du théorème* 2.2 *on a l'inclusion*

$$\big((A_0, A_1)_{\theta,p_0};\ (B_0, B_1)_{\theta,p_0}\big)_{t_0,p_0} \subset (S_0, S_1)_{\theta,p_0}.$$

3. Espaces intermédiaires entre un espace de Banach et le domaine d'une puissance d'un opérateur linéaire fermé non borné dans cet espace.

3.1. Les données sont les suivantes : E est un espace de Banach (complexe), de norme

$$a \to \| a \|$$

et A est un opérateur linéaire non borné, fermé de domaine D_A dans E. (On ne suppose *pas* que D_A est dense dans E en général.)

On fait l'hypothèse suivante

(H) $$(-A + \lambda)^{-1} \quad \textit{existe pour} \quad \lambda \geqq 0$$

et

(3.1) $$\| (-A + \lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leqq \frac{C_A}{\lambda + 1}$$

Dans ces conditions on a évidemment

$$\| (-A + \lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leqq \frac{C_A}{\lambda},$$

$$\| (-A + \lambda)^{-1} \|_{E \to D_A} \leqq (C_A + 1).$$

(On munit D_A de la norme $a \to \| Aa \|$, puisque A est un isomorphisme de D_A sur E).

L'espace D_{A^m}, muni de la norme

$$a \to \| A^m a \|$$

est un espace de Banach, contenu avec injection continue dans E; on va expliciter les espaces d'interpolation réels entre D_{A^m} et E.

THÉORÈME 3.1. — *Lorsque* A *vérifie* (H) $(D_{A^m}, E)_{\theta, p}$ *est le sous-espace de* E *formé des a tels que*

$$\lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A + \lambda)^{-m} a \in L^p_*(E),$$

la topologie est définie par la norme

$$a \to \left\{ \int_0^{+\infty} \| \lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A + \lambda)^{-m} a \|^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Démonstration :

(1) D'après ce qui est rappelé au chapitre 0 n° 1 point 1.6, pour $a \in (D_{A^m}, E)_{\theta, p}$, on peut trouver deux fonctions $u_0(\lambda)$ et $u_1(\lambda)$ telles que

$$a = u_0(\lambda) + u_1(\lambda) \qquad (\lambda > 0),$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \lambda^{-m\theta} u_0(\lambda) \in L^p_*(D_{A^m}), \\ \lambda^{m(1-\theta)} u_1(\lambda) \in L^p_*(E). \end{cases}$$

On a donc

$$(-A + \lambda)^{-m} a = (-A + \lambda)^{-m} u_0(\lambda) + (-A + \lambda)^{-m} u_1(\lambda),$$

d'où

$$\| (-A + \lambda)^{-m} a \|_{D_{A^m}} \leq \frac{C_A^m}{\lambda^m} \| u_0(\lambda) \|_{D_{A^m}} + (C_A + 1)^m \| u_1(\lambda) \|$$

et par conséquent

$$\lambda^{m(1-\theta)} (-A + \lambda)^{-m} a \in L^p_*(D_{A^m}),$$

et de plus

$$\left\{ \int_0^{+\infty} \| \lambda^{m(1-\theta)} (-A + \lambda)^{-m} a \|^p_{D_{A^m}} \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (C_A + 1)^m \left\{ \| \lambda^{-m\theta} u_0(\lambda) \|^p_{L^p_*(D_{A^m})} + \| \lambda^{m(1-\theta)} u_1(\lambda) \|^p_{L^p_*(E)} \right\};$$

cette inégalité est valable pour tous les couples de fonctions u_0, u_1, vérifiant (3.2), on a donc

$$\| \lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A+\lambda)^{-m} a \|_{L^p_*(E)} \leq (C_A+1)^m \inf \{ \| \lambda^{-m\theta} u_0(\lambda) \|_{L^p_*(D_{A^m})} + \| \lambda^{m(1-\theta)} u_1(\lambda) \|_{L^p_*(E)} \},$$

le inf étant pris par rapport aux couples $\{u_0, u_1\}$ de fonctions vérifiant (3.2), ce qui prouve que $(D_{A^m}, E)_{\theta,p}$ est contenu avec injection continue dans l'espace des $a \in E$ tels que

$$\lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A+\lambda)^{-m} a \in L^p_*(E).$$

(2) Réciproquement, fixons a avec

$$\lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A+\lambda)^{-m} a \in L^p_*(E)$$

et posons $u(\lambda) = \lambda^m A^m (-A+\lambda)^{-2m} a$; nous allons vérifier que

$$u \in W_*(p, -m\theta, D_{A^m}; p, m(1-\theta), E)$$

et que a est proportionnel à $\int_0^{+\infty} u(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$, ce qui prouvera que $a \in (D_{A^m}, E)_{\theta,p}$. On a en effet

$$\| u(\lambda) \|_{D_{A^m}} \leq (C_A+1)^m \lambda^m \| A^m (-A+\lambda)^{-m} a \|,$$

donc

$$\lambda^{-m\theta} u(\lambda) \in L^p_*(D_{A^m})$$

et

$$\| u(\lambda) \|_E \leq C_A^m \| A^m (-A+\lambda)^{-m} a \|,$$

donc

$$\lambda^{m(1-\theta)} u(\lambda) \in L^p_*(E).$$

Par conséquent, $b = \int_0^{+\infty} u(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$ est bien défini et est élément de $(D_{A^m}, E)_{\theta,p}$; calculons b. Pour cela nous admettons provisoirement le

Lemme 3.1. — *On suppose que* A *vérifie* (H) *alors pour a tel que*

$$\lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A+\lambda)^{-m} a \in L^p_*(E),$$

on a

$$\lim_{\lambda \to \infty} A^m (-A+\lambda)^{-m} a = 0.$$

(Remarquons que ce lemme est vrai pour tout $a \in E$ et de démonstration immédiate lorsque D_A est dense dans E, hypothèse que nous ne faisons pas en général.)

De ce lemme, résulte immédiatement que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^j A^m (-A + \lambda)^{-m-j} a = 0$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots m-1$.

On a

$$b = \int_0^\infty \lambda^{m-1} A^m (-A + \lambda)^{-2m} a \, d\lambda$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon'}} \int_\varepsilon^{\varepsilon'} \lambda^{m-1} A^m (-A + \lambda)^{-2m} a \, d\lambda.$$

On calcule cette dernière intégrale par parties; on obtient

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon'} \lambda^{m-1} A^m (-A + \lambda)^{-2m} a \, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{m!}{(m-k-1)!} \frac{(2m-k-2)!}{(2m-1)!} \lambda^{m-k-1} A^m (-A + \lambda)^{-2m+k+1} a \right]_\varepsilon^{\varepsilon'},$$

d'où

$$b = (-1)^m \frac{[(m-1)!]^2}{(2m-1)!} a.$$

On a ainsi démontré le théorème, mais on a en plus vérifié la proposition suivante

Proposition 3.1. — *Si* A *vérifie* (H), *l'application*

$$a \to \varphi(\lambda) = (-1)^m \frac{(2m-1)!}{[(m-1)!]^2} \lambda^m A^m (-A + \lambda)^{-2m} a$$

est linéaire continue de $(D_{A^m}, E)_{\theta, p}$ *dans*

$$W_*(p, -m\theta, D_{A^m}; p, m(1-\theta), E) \qquad et \qquad a = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

A présent, vérifions le lemme 3.1.

(1) Supposons pour commencer que $p = +\infty$: On a par hypothèse

$$\| A^m(-A+\lambda)^{-m}a \| \leq \frac{C}{\lambda^{m(1-\theta)}} \tag{3.3}$$

presque partout, donc partout, vu la continuité de $\lambda \mapsto A^m(-A+\lambda)^{-m}a$ (cette fonction est même analytique à valeurs dans E); on en déduit immédiatement

$$\lim_{\lambda \to \infty} A^m(-A+\lambda)^{-m}a = 0.$$

(2) Supposons maintenant $p < +\infty$; nous allons démontrer que la majoration (3.3) a encore lieu.

a. Dans une première étape on montre que

$$\int_D |x^\alpha F(x+iy)|^p \, dx\, dy < +\infty$$

pour

$$F(\lambda) = \| A^m(-A+\lambda)^{-m}a \|, \qquad \alpha = m(1-\theta) - \frac{2}{p}, \qquad \lambda = x+iy$$

avec

$$D = \left\{ x+iy \,\middle|\, x>0, |y| < \frac{x}{2C_{A^m}} \right\}.$$

De la majoration

$$\| (-A+\lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leq \frac{C_A}{\lambda}$$

pour λ réel > 0, résulte comme il est bien connu (*cf.* par exemple [3]) que $(-A+\lambda)$ est inversible dans le secteur

$$\left\{ \lambda \,\middle|\, |\arg \lambda| < \arcsin \frac{1}{C_A} \right\},$$

et $(-A+\lambda)^{-1}$ est holomorphe dans ce secteur; de plus pour $\lambda = x+iy$ dans ce secteur, on a

$$(-A+x+iy)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (iy)^k (-A+x)^{-k-1};$$

en particulier pour $|y| \leq \frac{x}{2mC_A}$ on a

$$F(x+iy) = \left\| \sum_{k\geq 0} (-1)^k (iy)^k (-A+x)^{-k} \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} A^m (-A+x)^{-m} a \right\|.$$

$$\leq \sum_{k\geq 0} |my|^k \| (-A+x)^{-1} \|^k F(x) \leq 2F(x)$$

On a donc

$$\int_0 |x^\alpha F(x+iy)|^p \, dx\, dy$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |x^\alpha 2F(x)|^p \int_{-\frac{x}{2mC_A}}^{+\frac{x}{2mC_A}} dy\, dx \leq \int_0^{+\infty} \left| x^{\alpha+\frac{2}{p}} F(x) \right|^p \frac{dx}{x} < +\infty.$$

b. Dans une seconde étape on déduit du point *a* la majoration 3.3 : On écrit la formule de Cauchy :

$$A^m (-A+x)^{-m} a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A^m (-A+x+re^{i\theta})^{-m} a \, d\theta$$

pour $0 < r \leq \frac{x}{2mC_A}$, d'où

$$A^m (-A+x)^{-m} a = \frac{1}{2\pi (r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} A^m (-A+x+re^{i\theta})^{-m} a \, d\theta$$

et

$$f(x) \leq \frac{1}{2\pi (r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} f(x+re^{i\theta}) \, d\theta.$$

On prendra $r_1 = \frac{x}{4mC_A}$, $r_2 = \frac{x}{2mC_A}$, on a donc

$$F(x) \leq \frac{C'}{x} \int_{\frac{x}{4mC_A}} \int_{\leq r \leq \frac{x}{2mC_A}} F(x+re^{i\theta}) \, dr\, d\theta.$$

La couronne dans laquelle on intègre est entièrement contenue dans D, on a donc, d'après le point 1,

$$\mathrm{F}(x_0) \leq \frac{\mathrm{C}'}{x_0}\left(\int_{\mathrm{D}} |x^{\alpha}\mathrm{F}(x+iy)|^p\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_{\frac{x_0}{4mC_\Lambda}}^{\frac{x_0}{2mC_\Lambda}}\int_{\leq r\leq \frac{x_0}{2mC_\Lambda}} |x_0+r\cos\theta|^{-\alpha p'} r^{-\frac{p'}{p}}\,dr\,d\theta\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\leq \frac{\mathrm{C}''}{x_0}\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{x_0}{2mC_\Lambda}}^{\frac{r}{2mC_\Lambda}} x_0^{-\alpha p'} r^{-\frac{p'}{p}}\,dr\right)^{\frac{1}{p'}} = \mathrm{C}'' x_0^{-\alpha-1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}} = \mathrm{C}'' x_0^{-m(1-\theta)},$$

i. e. $x_0^{m(1-\theta)} f(x_0) \leq \mathrm{C}''$,
c'est 3.3.

Le lemme 3.1 est complètement démontré.

3.2. La proposition 3.1 nous permettra (au numéro suivant) de trouver des situations concrètes où les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées. Nous allons démontrer une proposition « duale » qui permettra dans des cas concrets de vérifier les hypothèses du théorème 2.2.

Proposition 3.2. — *Lorsque* A *vérifie* (H), *l'application*

$$u \mapsto b = (-1)^m \frac{(2m-1)!}{[(m-1)!]^2}\int_0^{+\infty} \lambda^{m-1}\mathrm{A}^m(-\mathrm{A}+\lambda)^{-2m}u(\lambda)\,d\lambda$$

est linéaire continue de $\mathrm{L}^p_{-m\theta-\frac{1}{p}}(\mathrm{D}_{\Lambda^m}) + \mathrm{L}^p_{m(1-\theta)-\frac{1}{p}}(\mathrm{E})$ *dans* $(\mathrm{D}_{\Lambda^m}, \mathrm{E})_{\theta,p}$ *et* $b = a$ *lorsque* $u(\lambda) \equiv a$, $a \in (\mathrm{D}_{\Lambda^m}, \mathrm{E})_{\theta,p}$.

Démonstration. — Fixons

$$u \in \mathrm{L}^p_{-m\theta-\frac{1}{p}}(\mathrm{D}_{\Lambda^m}) + \mathrm{L}^p_{m(1-\theta)-\frac{1}{p}}(\mathrm{E}),$$

i. e. $u = u_0 + u_1$, avec

$$u_0 \in \mathrm{L}^p_{-m\theta-\frac{1}{p}}(\mathrm{D}_{\Lambda^m}), \qquad u_1 \in \mathrm{L}^p_{m(1-\theta)-\frac{1}{p}}(\mathrm{E}) \tag{3.4}$$

et posons $\varphi(\lambda) = \lambda^m A^m(-A+\lambda)^{-2m} u(\lambda)$, on a

$$b = (-1)^m \frac{(2m-1)!}{|(m-1)!|^2} \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

et pour prouver que $b \in (D_{A^m}, E)_{\theta,p}$, nous allons vérifier que

$$\varphi \in W_*(p, -m\theta, D_{A^m}; p, m(1-\theta), E).$$

Cela résulte des majorations

$$\| A^m \varphi(\lambda) \| \leq C_A^m (C_A+1)^m \| A^m u_0(\lambda) \| + \lambda^m (C_A+1)^{2m} \| u_1(\lambda) \|,$$

i. e. $\lambda^{-m\theta} \varphi(\lambda) \in L^p_*(D_{A^m})$,

et

$$\| \varphi(\lambda) \| \leq \frac{1}{\lambda^m} C_A^{2m} \| A^m u_0(\lambda) \| + C_A^m (C_A+1)^m \| u_1(\lambda) \|,$$

i. e. $\lambda^{m(1-\theta)} \varphi(\lambda) \in L^p_*(E)$.

De plus, on a l'inégalité

$$\| \varphi \|_{W_*(p,-m\theta,D_{A^m};p,m(1-\theta),E)} \leq (C_A+1)^{2m} \{ \| \lambda^{-m\theta} u_0(\lambda) \|_{L^p_*(D_{A^m})} + \| \lambda^{m(1-\theta)} u_1(\lambda) \|_{L^p_*(E)} \}$$

pour toutes les décompositions de u en somme $u_0 + u_1$, avec u_0 et u_1 vérifiant (3.4), on a donc

$$\| \varphi \|_{W^*(p,-m\theta,D_{A^m};p,m(1-\theta),E)} \leq (C_A+1)^m \| u \|_{L^p_{-m\theta-\frac{1}{p}}(D_{A^m}) + L^p_{m(1-\theta)-\frac{1}{p}}(E)},$$

ce qui prouve que $u \mapsto b$ est une application linéaire continue de

$$L^p_{-m\theta-\frac{1}{p}}(D_{A^m}) + L^p_{m(1-\theta)-\frac{1}{p}}(E) \quad \text{dans} \quad (D_{A^m}, E)_{\theta,p}.$$

L'identité $b = a$ pour $u(\lambda) \equiv a$, $a \in (D_{A^m}, E)_{\theta,p}$ résulte de la proposition 3.1.

3.3. Nous terminons ce numéro par quelques conséquences simples du théorème 3.1 :

Corollaire 3.1. — *Si* A *vérifie* (H), *alors pour* $1 \leq m \leq n-1$, D_{A^m} *est de classe* $\mathcal{K}_0(D_{A^n}, E)$ *avec* $1-\theta = \frac{m}{n}$.

(La définition des classes $\mathcal{K}_0$ est rappelée au chap. 0, n° 1, point 1.4.)

Démonstration. — Il suffit de prouver la double inclusion (algébrique et topologique)

$$(D_{A^n}, E)_{0,1} \subset D_{A^m} \subset (D_{A^n}, E)_{0,\infty}.$$

Pour $a \in (D_{A^n}, E)_{0,1}$ on a, d'après le théorème 3.1,

$$\lambda^m A^{n-m}(-A+\lambda)^{-n} a \in L^1_*(D_{A^m}),$$

d'où

$$\lambda^n A^n (-A+\lambda)^{-2n} a \in L^1_*(D_{A^m})$$

et par conséquent

$$b = \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} A^n (-A+\lambda)^{-2n} a \, d\lambda \in D_{A^m},$$

mais d'après la proposition 3.1, b est proportionnel à a et par conséquent $a \in D_{A^m}$ et

$$\| a \|_{D_{A^m}} \leq C \| a \|_{(D_{A^n}, E)_{0,1}}.$$

Ensuite pour $a \in D_{A^m}$, il est évident que

$$\lambda^m A^n (-A+\lambda)^{-n} a$$

est borné et que

$$\max_{\lambda > 0} \| \lambda^m A^n (-A+\lambda)^{-n} a \| \leq C \| a \|_{D_{A^m}}$$

et par conséquent d'après le théorème 3.1, on a l'inclusion (topologique)

$$D_{A^m} \subset (D_{A^m}, E)_{\theta,\infty}.$$

On en déduit aisément le

Corollaire 3.2. — *Pour m, n, μ, ν entiers ≥ 0 $(0 < \theta, t < 1)$ tels que $m(1-\theta) + n\theta = \mu(1-t) + \nu t$, on a l'identité*

$$(D_{A^m}, D_{A^n})_{\theta,p} = (D_{A^\mu}, D_{A^\nu})_{t,p}.$$

Il suffit d'appliquer le théorème de « réitération » de [19] (*voir* chap. 0). En particulier on déduit du corollaire 3.2 que pour $m(1-\theta)$ non entier, on a

$$D_{A^{\mu+1}} \subset (D_{A^m}, E)_{\theta,p} \subset D_{A^\mu}$$

avec $\mu = [m(1-\theta)]$ [partie entière de $m(1-\theta)$], et pour $m(1-\theta)$ entier, on a

$$D_{A^{\mu+2}} \subset (D_{A^m}, E)_{\theta,p} \subset D_{A^{\mu}},$$

avec $\mu = m(1-\theta)+1$.

Remarque 3.1. — Les résultats précédents sont utilisables lorsque A est un opérateur linéaire fermé de domaine D_A dans E, et qui vérifie l'hypothèse

(H′) $\qquad (-A+\lambda)$ *est inversible pour* $\lambda > 0$

et

$$\| (-A+\lambda)^{-1} \|_{E\to E} \leq \frac{C_A}{\lambda} \quad \textit{pour} \quad \lambda > 0.$$

Cette hypothèse plus naturelle, est plus facile à vérifier dans les cas pratiques, que l'hypothèse (H); elle est notamment vérifiée lorsque A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et borné d'opérateurs dans E (*cf.* par exemple [3], [8]), ou l'adjoint, au sens des opérateurs non bornés d'un tel opérateur (pour ce cas voir aussi l'appendice n° 1).

Lorsque A vérifie (H′) il est évident que $A-1$ vérifie (H); lorsqu'on substitue $A-1$ à A on ne modifie pas D_{A^m} et par conséquent d'après le théorème 3.1 $(D_{A^m}, E)_{\theta,p}$ est le sous-espace de E formé des a tels que

$$\lambda^{m(1-\theta)}(A-1)^m(-A+\lambda+1)^{-m}a \in L^p_*(E) \quad (^5).$$

Les corollaires 3.1 et 3.2 restent vrais sans modification d'énoncé.

---

(5) Lorsque $m(1-\theta)$ n'est pas entier, $\mu = [m(1-\theta)]$ (partie entière) un calcul simple montre que $(D_{A^m}, E)_{\theta,p}$ est le sous-espace de D_{A^μ} formé des a tels que

$$\lambda^{m(1-\theta)}A^m(-A+\lambda)^{-m}a \in L^p_*(E)$$

et la topologie est définie par la norme

$$a \mapsto \sum_{j=0}^{\mu} \| A^j a \| + \left\{ \int_0^\infty \| \lambda^{m(1-\theta)} A^m (-A+\lambda)^{-m} a \|^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

4. Une situation générale dans laquelle les critères de commutativité s'appliquent.

4.1. On donne deux espaces de Banach E_i $(i = 0,1)$ contenus avec injections continues dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{E}$.

On donne également dans E_i, un opérateur non borné A_i, de domaine D_{A_i}; on suppose que A_i est fermé et vérifie l'hypothèse (H') pour $i = 0, 1$: $(-A_i + \lambda)^{-1}$ existe pour $\lambda > 0$ et

$$\| (-A_i + \lambda)^{-1} \|_{E_i \to E_i} \leq \frac{C_i}{\lambda} \qquad (i = 0, 1).$$

On suppose enfin que A_0 et A_1 *coïncident dans* $D_{A_0} \cap D_{A_1}$ et que $(-A_0 + \lambda)^{-1}$ et $(-A_1 + \lambda)^{-1}$ *coïncident dans* $E_0 \cap E_1$ pour $\lambda > 0$.

4.2. Cette dernière condition signifie qu'on considère le « même » opérateur dans E_0 et dans E_1; plus précisément posons $E = E_0 + E_1$, et définissons l'opérateur non borné A dans $E_0 + E_1$ par

$$D_A = D_{A_0} + D_{A_1}$$

et

$$Aa = A_0 a_0 + A_1 a_1$$

pour $a = a_0 + a_1$, $a_0 \in D_{A_0}$, $a_1 \in D_{A_1}$.

Cela a bien un sens car si l'on peut écrire a de deux manières différentes en somme d'un élément de D_{A_0} et d'un élément de D_{A_1} :

$$a = a_0 + a_1 = a'_0 + a'_1, \qquad a_i, a'_i \in D_{A_i} \qquad (i = 0, 1)$$

la valeur trouvée pour Aa, ne dépend pas de la décomposition choisie : On a en effet

$$a_0 - a'_0 = a'_1 - a_1 \in D_{A_0} \cap D_{A_1},$$

d'où

$$A_0 (a_0 - a'_0) = A_1 (a'_1 - a_1),$$

i. e.

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 = A_0 a'_0 + A_1 a'_1,$$

puisque A_0 et A_1 coïncident dans $D_{A_0} \cap D_{A_1}$.

Par un raisonnement analogue basé sur le fait que $(-A_0+\lambda)^{-1}$ et $(-A_1+\lambda)^{-1}$ coïncident dans $E_0 \cap E_1$, on voit que $(-A+\lambda)$ est un isomorphisme de D_A sur E pour tout $\lambda > 0$, et par conséquent A est un opérateur fermé dans E et $(-A+\lambda)^{-1}$ est un opérateur linéaire continu de E dans E pour $\lambda > 0$; enfin il est évident que la majoration suivante a lieu :

$$\| (-A+\lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leq \frac{\sup(C_0, C_1)}{\lambda}.$$

Par conséquent, A vérifie l'hypothèse (H') dans E et A_i est la restriction de A à D_{A_i}; enfin on voit facilement que

$$D_{A_i} = \{ a \in D_A \cap E_i, \ Aa \in E_i \} \qquad (i = 0, 1).$$

4.3. Posons $E_\theta = [E_0, E_1]_\theta$ et

$$D_{A_\theta} = \{ a \in D_A \cap E_\theta, \ Aa \in E_\theta \}$$

et soit A_θ l'opérateur non borné dans E_θ, de domaine D_{A_θ} et défini par $A_\theta a = Aa$, c'est donc la restriction de A à D_{A_θ}; comme $(-A+\lambda)$ est un isomorphisme de D_{A_i} sur E_i, pour $i = 0, 1, \theta$, on vérifie facilement l'identité

$$D_{A_\theta} = [D_{A_0}, D_{A_1}]_\theta.$$

par conséquent A_θ est un opérateur fermé dans E_θ, $(-A_\theta+\lambda)$ est inversible pour $\lambda > 0$ et A_θ vérifie l'hypothèse (H') car on a la majoration

$$\| (-A_\theta+\lambda)^{-1} \|_{E_\theta \to E_\theta} \leq \frac{C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}}{\lambda}.$$

4.4. Des théorèmes des numéros 2 et 3 résulte le :

Théorème 4.1. — *Pour* $1 \leq p_i \leq +\infty$, $0 < t_i < 1$ $(i = 0, 1$ *et* $0 < \theta < 1)$, *on a l'identité*

$$[(D_{A_0^m}, E_0)_{t_0, p_0}; (D_{A_1^m}, E_1)_{t_1, p_1}]_\theta = (D_{A_\theta^m}, E_\theta)_{t_\theta, p_\theta},$$

avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad t_\theta = (1-\theta)\, t_0 + \theta\, t_1.$$

Démonstration. — Tout d'abord remplaçant au besoin A par $A - 1$ on se ramène au cas où A_i vérifie l'hypothèse (H) dans E_i, $i = 0, 1$.

On appliquera les théorèmes 2.1 et 2.2; il faut définir les opérateurs R et $\sum$; pour cela on utilisera les propositions 3.1 et 3.2.

On prend pour $\mathfrak{A}$ l'espace E et pour R l'opérateur

$$a \mapsto v(\lambda) = (-1)^m \frac{(2m-1)!}{[(m-1)!]^2} \lambda^m A^m (-A + \lambda)^{-2m} a;$$

il est évident que R est linéaire continu de E dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}_+; E)$, et d'après la proposition 3.1, la restriction de R à $(D_{A_i^m}, E_i)_{t_i, p}$ est linéaire continue de $(D_{A_i^m}, E_i)_{t_i, p_i}$ dans

$$W_*(p_i, -mt_i, D_{A_i^m}; p_i, m(1-t_i), E_i) \qquad (i = 0, 1);$$

enfin d'après la proposition 3.1, on a

$$a = \int_0^{+\infty} v(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

pour

$$a \in (D_{A_0^m}, E_0)_{t_0, p_0} + (D_{A_1^m}, E_1)_{t_1, p_1}$$

(qui est contenu dans $(D_{A^m}, E)_{\sup(t_0, t_1), +\infty}$).

On prend pour $\sum$ l'opérateur

$$u \mapsto b = (-1)^m \frac{(2m-1)!}{[(m-1)!]^2} \int_0^{+\infty} \lambda^{m-1} A^m (-A + \lambda)^{-2m} u(\lambda)\, d\lambda,$$

d'après la proposition 3.2, $\sum$ est linéaire continu de

$$L_i = L^{p_i}_{-mt_i - \frac{1}{p_i}}(D_{A_i^m}) + L^{p_i}_{m(1-t_i) - \frac{1}{p_i}}(E_i) \qquad \text{dans} \quad (D_{A_i^m}, E_i)_{t_i, p_i},$$

donc aussi de $L_0 + L_1$ dans E et toujours d'après la proposition 3.2 on a $\sum u = a$ pour $u(\lambda) \equiv a$, $a \in (D_{A_0^m}, E_0)_{t_0, p_0}$.

Les hypothèses des théorèmes 2.1 et 2.2 sont donc vérifiées et par conséquent on a l'identité

$$[(D_{A_0^m}, E_0)_{t_0,p_0}; (D_{A_1^m}, E_1)_{t_1,p_1}]_\theta = ([D_{A_0^m}, D_{A_1^m}]_\theta, [E_0, E_1]_\theta)_{t_\theta,p_\theta};$$

le théorème 4.1 en résulte, grâce à l'identité

$$[D_{A_0^m}, D_{A_1^m}]_\theta = D_{A_\theta^m}$$

[on vérifie cette dernière identité en remarquant que $(-A+\lambda)^m$ est un isomorphisme de $D_{A_i^m}$ sur E_i $(i=0, \theta, 1)$].

Le théorème 4.1 est démontré.

4.5. Sous les mêmes hypothèses posons

$$E_{\theta,p} = (E_0, E_1)_{\theta,p} \qquad \text{et} \qquad D_{A_{\theta,p}} = \{a \in D_A \cap E_{\theta,p},\ Aa \in E_{\theta,p}\}$$

et notons $A_{\theta,p}$ la restriction de l'opérateur A à $D_{A_{\theta,p}}$. On vérifie facilement l'identité

$$D_{A_{\theta,p}} = (D_{A_0}, D_{A_1})_{\theta,p}$$

et que $A_{\theta,p}$, considéré comme opérateur non borné dans $E_{\theta,p}$, de domaine $D_{A_{\theta,p}}$, est fermé et vérifie l'hypothèse (H').

Utilisant les théorèmes 2.1′ et 2.2′ au lieu des théorèmes 2.1 et 2.2, on obtient l'analogue du théorème 4.1 :

Théorème 4.1′. — *Pour* $1 \leq p_i \leq +\infty$, $0 < t_i < 1$ $(i=0, 1)$ *et* $0<\theta<1$, *on a l'identité*

$$((D_{A_0^m}, E_0)_{t_0,p_0}; (D_{A_1^m}, E_1)_{t_1,p_1})_{\theta,p_\theta} = \left(D_{A_{\theta,p_\theta}^m}, E_{\theta,p_\theta}\right)_{t_\theta,p_\theta}$$

avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad t_\theta = (1-\theta)\,t_0 + \theta\, t_1.$$

5. Espaces $B_q^{s,E}$.

5.1. On se place dans la situation de la remarque 3.1, i. e., A vérifie (H') et l'on suppose que A est la restriction à E d'un opérateur défini dans un espace plus grand (*voir* les hypothèses précises plus loin).

On définit alors une famille d'espaces $(B_q^{s,E})$ stable par interpolation réelle, et qui généralisent au cas abstrait considéré ici les espaces de Sobolev, et qui seront utiles dans les applications.

5.2. Les hypothèses précises sont les suivantes : E est un espace de Banach (6) contenu avec injection continue dans l'espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{E}$. A est un opérateur linéaire continu dans $\mathcal{E}$ et $(-A+\lambda)$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$ pour tout $\lambda > 0$.

Pour m entier ≥ 0, on pose

$$W^{m,E} = \{ a \in E ;\ A^k a \in E \ (k = 0, 1, \ldots, m) \} ;$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$a \mapsto \sum_{k=0}^{m} \| A^k a \|.$$

On notera A_E la restriction de A à $W^{1,E}$; on considèrera A_E comme un opérateur non borné dans E de domaine $D_{A_E} = W^{1,E}$. Il est évident que A_E est fermé. On suppose que A_E vérifie l'hypothèse (H'), i. e. que $(-A+\lambda)^{-1}$ opère de E dans E et que

$$\| (-A+\lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leq \frac{C}{\lambda} \quad \text{pour } \lambda > 0.$$

On a évidemment $D_{A_E^m} = W^{m,E}$, A_E^m est fermé et sur $W^{m,E}$ la norme définie plus haut et la norme du graphe de A_E^m sont équivalentes.

5.3. On va maintenant définir $W^{m,E}$ pour m entier négatif.

On notera $G(A_E)$ le graphe de A_E, c'est-à-dire le sous-espace de $D_{A_E} \times E$ formé des couples (e, Ae).

Définition 5.1. — $W^{-1,E}$ *est le sous-espace de* $\mathcal{E}$ *formé des éléments* $Ae - f$ *avec* $e, f \in E$; *on le munit de la norme*

$$x \mapsto \inf_{\substack{(e,f) \in E \times E \\ x = Ae - f}} (\| e \|_E + \| f \|_E).$$

(6) de norme notée $a \to \| a \|$.

Il est évident que $W^{-1,E}$ est isomorphe au quotient $\frac{E \times E}{G(A_E)}$, c'est donc un espace de Banach. Il est aussi évident que E s'identifie à un sous-espace vectoriel de $W^{-1,E}$, que l'injection de E dans $W^{-1,E}$ est continue et que la restriction de A à E est linéaire continue de E dans $W^{-1,E}$; enfin pour tout $\lambda > 0$ $(-A + \lambda)$ est un isomorphisme de E sur $W^{-1,E}$.

Remarque 5.1. — Lorsque E est *réflexif* et D_{A_E} est *dense* dans E, on peut donner de $W^{-1,E}$ une définition équivalente par dualité : Notons E^* l'antidual de E et A_E^* l'adjoint de A_E au sens de la théorie des opérateurs non bornés; alors A_E^* est un opérateur linéaire fermé de domaine $D_{A_E^*}$; si l'on munit $D_{A_E^*}$ de la norme du graphe de A_E^*, i. e. de la topologie la moins fine rendant continues les applications 1 et A_E^* de $D_{A_E^*}$ dans E^*, il est évident que W_E^{-1} *est le dual de* $D_{A_E^*}$.

En itérant la construction précédente, on définit $W^{m,E}$ pour tout entier $m < 0$.

Nous pouvons maintenant poser la

Définition 5.2. — *Pour s réel de signe quelconque et* $1 \leq q \leq +\infty$ *on pose*

$$B_q^{s,E} = (W^{m,E}; W^{-m,E})_{\theta,q},$$

où m est un entier quelconque $> |s|$ *et* θ *tel que* $s = m(1-2\theta)$.

Il faut d'abord vérifier que cette définition a un sens, i. e. que

$$(W^{m,E}; W^{-m,E})_{\theta,q} = (W^{n,E}; W^{-n,E})_{t,q}$$

pour m, n entiers > 0(7), avec $m(1-2\theta) = n(1-2t)$. Utilisant le fait que pour $\lambda > 0$, $(-A + \lambda)^n$ est un isomorphisme de $W^{k,E}$ sur $W^{k-n,E}$ pour tout entier k (de signe quelconque) il revient au même de vérifier l'identité

$$(W^{m+n,E}; W^{m+n,E})_{\theta,q} = (W^{2n,E}; W^{0,E})_{t,q}.$$

(7) On peut supposer $m < n$.

i. e.,

$$\left(D_{A_E^{m+n}};\ D_{A_E^{-m+n}}\right)_{\theta,q} = \left(D_{A_E^{2n}};\ E\right)_{t,q};$$

cette dernière identité résulte du corollaire 3.2.

Remarque 5.1. — Un raisonnement analogue prouverait l'identité

$$B_q^{s,E} = \left(W^{m,E};\ W^{n,E}\right)_{\theta,q}$$

pour m, n entiers de signes quelconques avec $m > s > n$ [θ tel que $s = m(1-\theta) + n\theta$], $1 \leq q \leq \infty$.

5.5. Ceci posé, nous pouvons reformuler les résultats du numéro 4 dans le cas des espaces $B_q^{s,E}$:

On donne *deux espaces de Banach* E_i $(i = 0,1)$ *contenus avec injections continues dans* $\mathcal{E}$ *et* A *opérateur linéaire continu dans* $\mathcal{E}$ *tel que* $-A + \lambda$ *soit un automorphisme de* $\mathcal{E}$ *pour tout* $\lambda > 0$.

On définit les opérateurs A_{E_i} et les espaces W^{m,E_i} comme ci-dessus et *l'on suppose que* $(-A_{E_i} + \lambda)$ *est inversible dans* E_i *pour* $\lambda > 0$ *et que l'hypothèse* (H') *est vérifiée par* A_{E_i} :

$$\| (-A_{E_i} + \lambda)^{-1} \|_{E_i \to E_i} \leq \frac{C_i}{\lambda}, \qquad \lambda > 0 \ (i = 0,\ 1) \quad (^8).$$

Il est évident que A_{E_0} et A_{E_1} coïncident dans $D_{A_{E_0}} \cap D_{A_{E_1}}$ et que $(-A_{E_0} + \lambda)^{-1}$ et $(-A_{E_1} + \lambda)^{-1}$ coïncident dans $E_0 \cap E_1$ pour $\lambda > 0$, car ce sont les restrictions d'un même opérateur défini dans $\mathcal{E}$.

Toutes les hypothèses du numéro 4 étant vérifiées ici, nous pouvons appliquer les résultats de ce numéro. $D_{A_0^m}$ est ici W^{m,E_0} avec $E_0 = [E_0, E_1]_0$ et D_{A_{0,p_0}^m} est $W^{m,E_{0,p_0}}$ avec $E_{0,p_0} = (E_0, E_1)_{0,p_0}$ et les identités des théorèmes 4.1 et 4.1′ s'écrivent

$$[B_{p_0}^{s_0,E_0},\ B_{p_1}^{s_1,E_1}]_\theta = B_{p_0}^{s_0,E_0} \tag{5.1}$$

et

$$(B_{p_0}^{s_0,E_0},\ B_{p_1}^{s_1,E_1})_{\theta,p_0} = B_{p_0}^{s_0,E_{0,p_0}}, \tag{5.2}$$

(8) On pourra donc utiliser aussi les espaces B_q^{s,E_i}.

avec

$$s_\theta = (1-\theta)\,s_0 + \theta s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

pour $1 \leqq p_i \leqq +\infty$, $s_i > 0$ (9) $(i = 0, 1)$.

Nous pouvons lever la restriction sur s_i :

THÉORÈME 5.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus et pour* $1 \leqq p_i \leqq +\infty$ $(i = 0, 1)$, s_i *réels de signes quelconques, nous avons les identités*

$$[\mathrm{B}^{s_0, E_0}_{p_0}, \mathrm{B}^{s_1, E_1}_{p_1}]_\theta = \mathrm{B}^{s_\theta, [E_0, E_1]_\theta}_{p_\theta} \tag{5.3}$$

et

$$(\mathrm{B}^{s_0, E_0}_{p_0}, \mathrm{B}^{s_1, E_1}_{p_1})_{\theta, p_\theta} = \mathrm{B}^{s_\theta, (E_0, E_1)_{\theta, p_\theta}}_{p_\theta}, \tag{5.4}$$

avec

$$s_\theta = (1-\theta)\,s_0 + \theta s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Démonstration. — On se ramène au cas où $s_i > 0$ $(i = 0, 1)$ à l'aide de l'isomorphisme $(-\mathrm{A} + \lambda)^k$ k assez grand (pour $\lambda > 0$; rappelons qu'alors $(-\mathrm{A} + \lambda)^k$ est un isomorphisme de $\mathrm{W}^{m, E}$ sur W^{m-k, E_i} pour tout entier m, $i = 0, 1$, c'est donc aussi un isomorphisme de B^{s, E_i}_q sur B^{s-k, E_i}_q pour tout nombre réel s et $1 \leqq q \leqq \infty$, $(i = 0, 1)$. Les identités (5.3) et (5.4) résultent de (5.1) et (5.2) respectivement.

5.6. Nous terminons ce numéro par le

COROLLAIRE 5.1. — *Sous les hypothèses du point* 5.5 *et pour* s_i *entiers de signes quelconques* $i = 0, 1$, *on a les inclusions :*

$$\mathrm{B}^{s_\theta, [E_0, E_1]_\theta}_1 \subset [\mathrm{W}^{s_0, E_0}, \mathrm{W}^{s_1, E_1}]_\theta \subset \mathrm{B}^{s_\theta, [E_0, E_1]_\theta}_\infty \tag{5.5}$$

et

$$\mathrm{B}^{s_\theta, (E_0, E_1)_{\theta, 1}}_1 \subset (\mathrm{W}^{s_0, E_0}, \mathrm{W}^{s_1, E_1})_{\theta, p} \subset \mathrm{B}^{s_\theta, (E_0, E_1)_{\theta, \infty}}_\infty, \tag{5.6}$$

avec $s_\theta = (1-\theta)\,s_0 + \theta s_1$ *et* $1 \leqq p \leqq \infty$ *quelconque.*

---

(9) Cette restriction vient de ce que dans l'application des théorèmes 4.1 et 4.1 on a $s_i = m(1 - t_i)$ $(i = 0, \theta, 1)$.

Démonstration. — (5.5) et (5.6) résultent immédiatement de (5.3) et (5.4) respectivement et des inclusions

$$B_1^{m,E_i} \subset W^{m,E_i} \subset B_\infty^{m,E_i} \qquad (i=0,1) \tag{5.7}$$

pour m entier; pour m entier >0, les inclusions (5.7) résultent du corollaire 3.1 car d'après ce corollaire on a

$$(W^{m+1,E_i}, W^{m-1,E_i})_{\frac{1}{2},1} \subset W^{m,E_i} \subset (W^{m+1,E_i}, W^{m-1,E_i})_{\frac{1}{2},\infty}$$

et d'après la remarque 5.1 on a les identités

$$B_q^{m,E_i} = (W^{m+1,E_i}, W^{m-1,E_i})_{\frac{1}{2},q} \qquad (1 \leq q \leq \infty);$$

dans le cas $m \leq 0$ les inclusions (5.7) se déduisent des mêmes inclusions avec $m > 0$, en utilisant l'isomorphisme $(-A+\lambda)^{-m+1}$.

6. Un exemple.

6.1. Nous appliquerons les résultats du numéro 5 en prenant pour E_i l'espace $L^{p_i}(\mathbf{R}) = L^{p_i}$ des fonctions mesurables et de puissance p_i sommable pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, $1 \leq p_i \leq +\infty$, $(i=0,1)$. On prend $\mathcal{E} = \mathcal{B}'(\mathbf{R})$ espace des distributions bornées sur $\mathbf{R}$, et $A = \dfrac{d}{dx}$.

Les hypothèses du point 5.5 sont vérifiées car pour $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, $\left(-\dfrac{d}{dx}+\lambda\right)$ est un endomorphisme de $\mathcal{B}'(R)$ [c'est le transposé de $\left(+\dfrac{d}{dx}+\bar{\lambda}\right)$ endomorphisme de $\mathcal{D}_{L^1(\mathbf{R})}$], et comme il est bien connu $\left(-\dfrac{d}{dx}+\lambda\right)$ est pour $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ un isomorphisme de

$$D_{A_{E_i}} = \{ u \in L^{p_i};\ u' \in L^{p_i} \} = W^{1,p_i}$$

sur L^{p_i}, l'isomorphisme inverse admettant la majoration

$$\left\| \left(-\frac{d}{dx}+\lambda\right)^{-1} \right\|_{L^{p_i} \to L^{p_i}} \leq \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}.$$

6.2. Pour commencer explicitons les espaces W^{m,E_i} et B_q^{s,E_i} lorsque $E_i = L^{p_i}$.

Pour m entier $\geqq 0$ et $1 \leqq p_i \leqq \infty$, $W^{m, L^{p_i}}$ est l'espace habituellement noté $W^{m, p_i}(\mathbf{R}) = W^{m, p_i}$ des distributions sur $\mathbf{R}$ dont les dérivées d'ordre $\leqq m$ sont dans L^{p_i}; pour m entier < 0 et $1 \leqq p_i \leqq \infty$, $W^{m, L^{p_i}}$ est habituellement noté $W^{m, p_i}(\mathbf{R}) = W^{m, p_i}$, c'est l'espace des distributions sur $\mathbf{R}$ qui sont sommes des dérivées d'ordre au plus $-m$ de fonctions de L^{p_i}.

Pour s réel et $1 < p_i < \infty$, $B_q^{s, L^{p_i}}$ est usuellement noté $B_q^{s, p_i}(\mathbf{R}) = B_q^{s, p_i}$; ces espaces ont été décrits au chapitre 0, n° 2; lorsque $q = p_i$ on a les espaces B^{s, p_i} (de Besov, *cf.* [35]) et lorsque $q = +\infty$, on a les espaces $H_{p_i}^s$ (de Nikolskiĭ, *cf.* [23]).

Pour s non entier > 0, le cas $p_i = q = +\infty$ est particulier : comme il sera démontré dans l'appendice numéro 1, B_∞^{s, L^∞} est l'espace usuellement noté $C^s(\mathbf{R}) = C^s$ des fonctions u dont les dérivées d'ordre $\leqq [s]$ sont continues et bornées et dont la dérivée d'ordre $[s]$ est uniformément höldérienne d'exposant $s - [s]$:

$$| u^{([s])}(x+t) - u^{([s])}(x) | \leqq C t^{s-[s]};$$

pour plus de commodité nous noterons indifféremment C^s ou $B_\infty^{s, \infty}$ cet espace.

De manière générale, nous noterons B_q^{s, p_i} l'espace $B_q^{s, L^{p_i}}$.

6.3. L'application du théorème 5.1 fournit les énoncés suivants :

Théorème 6.1. — *Pour s_i réels de signe quelconque, $1 \leqq p_i$, $q_i \leqq +\infty$ $(i = 0, 1)$, $0 < \theta < 1$ on a l'identité*

$$[B_{q_0}^{s_0, p_0}; B_{q_1}^{s_1, p_1}]_\theta = B_{q_\theta}^{s_\theta, p_\theta},$$

avec

$$s_\theta = (1-\theta) s_0 + \theta s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Théorème 6.2. — *Pour s_i réels de signe quelconque, $1 \leqq p_i \leqq +\infty$ $(i = 0, 1)$, $0 < \theta < 1$ on a l'identité*

$$(B_{p_0}^{s_0, p_0}; B_{p_1}^{s_1, p_1})_{\theta, p_\theta} = B_{p_\theta}^{s_\theta, p_\theta},$$

avec

$$s_\theta = (1-\theta) s_0 + \theta s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Ces énoncés sont des applications immédiates des identités (5.3) et (5.4); il est important de remarquer que si l'on prend $p_1 = q_1 = +\infty$ et $s_1 > 0$ non entier, on obtient un théorème d'interpolation entre espaces de type Sobolev et de type Hölder; nous utiliserons cette remarque plus systématiquement au numéro 10.

6.4. L'application du corollaire 5.1 nous fournit les inclusions

$$B_1^{s_\theta, p_\theta} \subset [W^{s_0, p_0}, W^{s_1, p_1}]_\theta \subset B_\infty^{s_\theta, p_\theta}, \tag{6.1}$$

$$B_1^{s_\theta, p_\theta} \subset (W^{s_0, p_0}, W^{s_1, p_1})_{\theta, p_\theta} \subset B_\infty^{s_\theta, p_\theta}, \tag{6.2}$$

pour $1 \leq p_i \leq \infty$ $(i = 0, 1)$, s_i entiers $(i = 0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$, avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad s_\theta = (1-\theta)\, s_0 + \theta s_1.$$

Dans le cas particulier (des espaces L^{p_i}), nous pouvons obtenir des inclusions plus précises, à l'aide d'un résultat de [33] que nous allons redémontrer : D'après (5.7) nous avons les inclusions

$$B_1^{m, 1} \subset W^{m, 1}, \tag{6.3}$$

$$W^{m, \infty} \subset B_\infty^{m, \infty}, \tag{6.4}$$

d'ailleurs on a l'identité classique [18] :

$$W^{m, 2} = B_2^{m, 2}. \tag{6.5}$$

Par interpolation (utilisant le théorème 6.1 ou le théorème 6.1′) on déduit de (6.3) et (6.5) l'inclusion

$$B_p^{m, p} \subset W^{m, p} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq p \leq 2 \tag{6.6}$$

et de (6.4) et (6.5) l'inclusion

$$W^{m, p} \subset B_p^{m, p} \qquad \text{pour} \quad 2 \leq p \leq \infty. \tag{6.7}$$

Il est évident que les inclusions (6.6) et (6.7) permettent de préciser les inclusions (6.1) et (6.2); par exemple pour $1 \leq p_0 \leq 2 \leq p_1 \leq \infty$, s_i entiers, $i = 0, 1$ on a les inclusions

$$B_{q_0}^{s_\theta, p_\theta} \subset [W^{s_0, p_0}, W^{s_1, p_1}]_\theta \subset B_{q_1}^{s_\theta, p_\theta},$$

$$B_{q_0}^{s_\theta, p_\theta} \subset (W^{s_0, p_0}, W^{s_1, p_1})_{\theta, q} \subset B_{q_1}^{s_\theta, p_\theta},$$

avec

$$s_\theta = (1-\theta)\,s_0 + \theta\, s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \theta, \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{\theta}{p_1}, \qquad q_0 \leqq q \leqq q_1.$$

Nous n'insisterons pas plus sur ce point.

6.5. Nous terminerons ce numéro par une extension des théorèmes 6.1 et 6.2 au cas où les fonctions considérées sont à valeurs vectorielles : On donne deux espaces de Banach X_i $(i = 0, 1)$ contenus avec injections continues dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathfrak{X}$; on prend pour $\mathcal{E}$ l'espace $\mathcal{B}'(\mathbf{R}; \mathfrak{X})$ des distributions d'une variable bornées à valeurs dans $\mathfrak{X}$, $A = \frac{d}{dx}$ et pour E_i l'espace $L^{p_i}(\mathbf{R}; X_i) = L^{p_i}(X_i)$; on notera $B_{q_i}^{s_i, p_i}(X_i)$ l'espace $B_{q_i}^{s_i, L^{p_i}(X_i)}$ $(i = 0, 1)$.

On a alors les identités suivantes :

$$[B_{q_0}^{s_0, p_0}(X_0);\ B_{q_1}^{s_1, p_1}(X_1)]_\theta = B_{q_\theta}^{s_\theta, p_\theta}([X_0, X_1]_\theta) \tag{6.8}$$

$$(B_{p_0}^{s_0, p_0}(X_0);\ B_{p_1}^{s_1, p_1}(X_1))_{\theta, p_\theta} = B_{p_\theta}^{s_\theta, p_\theta}((X_0, X_1)_{\theta, p_\theta}) \tag{6.9}$$

pour s_i réels de signe quelconque, $1 \leqq p_i \leqq +\infty$ $(i = 0, 1)$, $0 < \theta < 1$, avec

$$s_\theta = (1-\theta)\,s_0 + \theta\, s_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Pour démontrer ces identités, on utilise (5.3) et (5.4) et les identités (*cf.* [19], [1] et chap. 0, n° 2, point 2.1)

$$[L^{p_0}(X_0);\ L^{p_1}(X_1)]_\theta = L^{p_\theta}([X_0, X_1]_\theta),$$

$$(L^{p_0}(X_0);\ L^{p_1}(X_1))_{\theta, p_\theta} = L^{p_\theta}((X_0, X_1)_{\theta, p_\theta}).$$

Nous allons détailler un exemple intéressant; posons avec [25] la

Définition 6.1. — *Pour* $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ *avec* r_i réel > 0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *et* $1 \leqq p \leqq +\infty$ *on pose*

$$S^{\vec{r}, p}B(\mathbf{R}^n) = B_p^{r_0, p}(\ldots(B_p^{r_n, p})).$$

Il est facile utilisant [19] d'expliciter les espaces ainsi obtenus pour $1 \leqq < p < +\infty$.

Pour $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ multi-entier à composantes $r_i \geqq 0$, on désigne (suivant [24]) par $S^{\vec{r}, p}(\mathbf{R}^n)$ l'espace des u telles que $D^{\vec{\alpha}} u \in L^p(\mathbf{R}_n)$ pour tout multi-entier $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que $0 \leqq \alpha_i \leqq r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; c'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \sum_{\substack{0 \leqq \alpha_i \leqq r_i \\ i = 1, 2, \ldots n}} \left(\int_{\mathbf{R}_n} | D^{\vec{\alpha}} u(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $S^{\vec{r}, p} B(\mathbf{R}^n)$ est l'espace des $u \in S^{\vec{r}, p}(\mathbf{R}^n)$ telles que pour toute suite $\{ j_1, \ldots, j_l \}$ extraite de $\{ 1, 2, \ldots, n \}$ on ait

$$\int_{\mathbf{R}^l} \int_{\mathbf{R}^n} \left(t_1^{-\alpha_{j_1}} \ldots t_l^{-\alpha_{j_l}} \left| \Delta_{j_1, t_1}^{k_{j_1}} \ldots \Delta_{j_l, t_l}^{k_{j_l}} \frac{\partial^{\sum_{i=1}^{n} r_i^*} u(x)}{\partial x_1^{r_1^*} \ldots \partial x_n^{r_n^*}} \right| \right)^p dx_1 \ldots dx_n \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_l}{t_l} < +\infty$$

avec

$$\alpha_i = r_i - r_i^*, \; k_i = [\alpha_i] + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Lorsque aucun des nombres r_i n'est entier $S^{\vec{r}, p} B(\mathbf{R}^n)$ est l'espace $S^{\vec{r}, p} W(\mathbf{R}^n)$ de [25].

D'après les théorèmes généraux, on a les résultats suivants sur l'interpolation dans les espaces $S^{\vec{r}, p}(\mathbf{R}^n)$:

Théorème 6.3. — *Pour $\vec{r}_0$ et $\vec{r}_1$ vecteurs à composantes > 0 quelconques, $1 \leqq p_i \leqq +\infty$ $(i = 0, 1)$ et $0 < \theta < 1$, on a*

$$\left[S^{\vec{r}_0, p_0} B(\mathbf{R}^n); S^{\vec{r}_1, p_1} B(\mathbf{R}^n) \right]_\theta = S^{\vec{r}_\theta, p_\theta} B(\mathbf{R}^n)$$

et

$$\left(S^{\vec{r}_0, p_0} B(\mathbf{R}^n); S^{\vec{r}_1, p_1} B(\mathbf{R}^n) \right)_{\theta, p_\theta} = S^{\vec{r}_\theta, p_\theta} B(\mathbf{R}^n)$$

avec

$$\vec{r}_\theta = (1 - \theta) \vec{r}_0 + \theta \vec{r}_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

7. Extension des résultats des numéros 3 et 4 au cas de plusieurs opérateurs commutatifs.

7.1. Dans une première partie on démontre des résultats analogues à ceux du numéro 3, dans le cas de plusieurs opérateurs.

Les données sont les suivantes : E est un espace de Banach et $A_1, \ldots, A_n$ est une famille de n opérateurs fermés non bornés dans E, ayant respectivement pour domaines $D_{A_1}, \ldots, D_{A_n}$. On suppose que chacun des opérateurs $A_1, \ldots, A_n$ vérifie l'hypothèse (H) [ou l'hypothèse plus faible (H')], i. e. $(-A_i+\lambda)$ est inversible pour $\lambda \geqq 0$ et

$$\| (-A_i+\lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leqq \frac{C_i}{\lambda+1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Enfin on suppose que les opérateurs (bornés) $(-A_i+\lambda)^{-1}$ et $(-A_j+\mu)^{-1}$ *commutent* pour $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ et $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$.

On notera $\vec{A}$ le système d'opérateurs $\{A_1, \ldots, A_n\}$ et $D_{\vec{A}} = \bigcap_{i=1}^{n} D_{A_i}$.

THÉORÈME 7.1. — *Pour* $0<\theta<1$, $1 \leqq p \leqq +\infty$ *on a l'identité*

$$(D_{\vec{A}}, E)_{\theta, p} = \bigcap_{i=1}^{n} (D_{A_i}, E)_{\theta, p},$$

c'est par conséquent le sous-espace de E *formé des a tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{+\infty} \| \lambda^{1-\theta} A_i (A_i+\lambda)^{-1} a \|^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Démonstration. — L'inclusion

$$(D_{\vec{A}}, E)_{\theta, p} \subset (D_{A_i}, E)_{\theta, p} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

est évidente; il suffira donc de prouver l'inclusion de « droite à gauche » : pour cela on fixe $a \in \bigcap_{i=1}^{n} (D_{A_i}, E)_{\theta, p}$, c'est-à-dire tel que

$$\lambda^{1-\theta} A_i (-A_i+\lambda)^{-1} a \in L^p_*(E) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

et l'on pose

$$u(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda^n A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} a ;$$

on a à vérifier que $u \in W_*(p, -\theta, D_{\tilde{A}}; p, 1-\theta, E)$

et que $a = \int_0^{+\infty} u(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$, ce qui prouvera que $a \in (D_{\tilde{A}}, E)_{\theta, p}$.

Vu l'hypothèse de commutativité on a

$$\| u(\lambda) \| \leq \left(\prod_{i=1}^{n} C_i \right) \sum_{j=1}^{n} \| A_j (-A_j + \lambda)^{-1} a \|$$

et par conséquent $\lambda^{1-\theta} u(\lambda) \in L_*^p(E)$.

Toujours grâce à l'hypothèse de commutativité $(-A_i + \lambda)^{-1}$ est un opérateur linéaire continu dans D_{A_j}, de norme $\leq \frac{C_i}{\lambda}$; on a donc

$$\begin{aligned} \| u(\lambda) \|_{D_{A_k}} &= \| A_k u(\lambda) \| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda^n \left\| A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i \neq k} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} A_k (-A_k + \lambda)^{-1} a \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \lambda (C_j + 1) \left(\prod_{i \neq k} C_i \right) \| A_k (-A_k + \lambda)^{-1} a \| \end{aligned}$$

et par conséquent $\lambda^{-\theta} u(\lambda) \in L_*^p(D_{A_k})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. On a donc bien

$$u \in W_*(p, -\theta, D_{\tilde{A}}; p, 1-\theta, E),$$

l'application $a \mapsto u$ étant linéaire continue de $\bigcap_{i=1}^{n} (D_{A_i}, E)_{\theta, p}$ dans $W_*(p, -\theta, D_{\tilde{A}};\ p, 1-\theta, E)$.

L'élément $b = \int_0^{+\infty} u(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$ est bien défini dans $(D_A, E)_{\theta, p}$; il nous reste à vérifier que $b = a$.

Pour commencer on remarque que

$$\frac{1}{\lambda} u(\lambda) = v'(\lambda),$$

avec

$$v(\lambda) = \lambda^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} a$$

on a donc

$$\left[b = \lim_{\varepsilon \to 0} v(\lambda) \right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} a ;$$

d'après le lemme 3.1, on a

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_i (-A_i + \lambda)^{-1} a = 0$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$. Des identités

$$\lambda (-A_i + \lambda)^{-1} = 1 + A_i (-A_i + \lambda)^{-1}$$

on déduit que

$$\lambda^n \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} a = a + B(\lambda) a,$$

où $B(\lambda)$ est une combinaison linéaire finie d'opérateurs qui sont des produits d'opérateurs de la forme $A_i(-A_i + \lambda)^{-1}$; on a donc

$$\lim_{\lambda \to \infty} B(\lambda) a = 0$$

et par conséquent on a comme $b = a$.

Le théorème 7.1 est démontré; on a même démontré la

Proposition 7.1. — *L'application*

$$a \mapsto u(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda^n A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} a$$

est linéaire continue de $(D_{\overline{A}}, E)_{\theta, p}$ *dans* $W_*(p, -\theta, D_{\overline{A}}; p, 1-\theta, E)$ *et*

$$a = \int_0^{+\infty} u(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Cette proposition est l'analogue de la proposition 3.1 dans le cas de plusieurs opérateurs; nous allons démontrer une proposition « duale » analogue de la proposition 3.2.

PROPOSITION 7.2. — *L'application*

$$u \mapsto b = -\sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} u(\lambda)\, d\lambda$$

est linéaire continue de

$$L^p_{-\theta-\frac{1}{p}}(D_{\overrightarrow{A}}) + L^p_{1-\theta-\frac{1}{p}}(E)$$

dans $(D_{\overrightarrow{A}}, E)_{\theta,p}$ *et* $b = a$ *lorsque* $u(\lambda) \equiv a$, $a \in (D_{\overrightarrow{A}}, E)_{\theta,p}$.

Démonstration. — Fixons $u \in L^p_{-\theta-\frac{1}{p}}(D_{\overrightarrow{A}}) + L^p_{1-\theta-\frac{1}{p}}(E)$, on peut l'écrire sous la forme $u_0 + u_1$ avec

$$u_0 \in L^p_{-\theta-\frac{1}{p}}(D_{\overrightarrow{A}}),\ u_1 \in L^p_{1-\theta-\frac{1}{p}}(E) \tag{7.1}$$

Posons

$$\varphi(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda^n A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} u(\lambda),$$

on va vérifier que

$$\varphi \in W_*(p, -\theta, D_{\overrightarrow{A}}; p, 1-\theta, E)$$

et par conséquent $b = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$ est bien défini comme élément de $(D_{\overrightarrow{A}}; E)_{\theta,p}$; on a en effet :

$$\| \varphi(\lambda) \|_{D_{A_k}} = \| A_k \varphi(\lambda) \| \leq \sum_{=1}^{n} \left\{ (C_j + 1) \prod_{i=1}^{n} C_i \right\} . \| A_k u_0(\lambda) \|$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left\{ (C_j + 1) \prod_{i \neq k} C_i \right\} (C_k + 1) \lambda \| u_1(\lambda) \|,$$

donc $\lambda^{-\theta} \varphi(\lambda) \in L^r_*(D_{A_k})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, i. e.,

$$\lambda^{-\theta} \varphi(\lambda) \in L^p_*(D_{\overrightarrow{A}});$$

on a également

$$\| \varphi(\lambda) \| \leq \sum_{j=1}^{n} C_j \left\{ \prod_{i=1}^{n} C_i \right\} \frac{1}{\lambda} \| A_j u_0(\lambda) \| + \sum_{j=1}^{n} (C_j + 1) \left\{ \prod_{i=1}^{n} C_i \right\} \cdot \| u_1(\lambda) \|.$$

donc $\lambda^{1-\theta} \varphi(\lambda) \in L^p_*(E)$; on a donc bien

$$\varphi \in W_*\left(p, -\theta, D_{\vec{A}}; p, 1-\theta, E\right)$$

et

$$\| \varphi \|_{W_*\left(p, -\theta, D_{\vec{A}}; p, 1-\theta, E\right)} \leq C \left\{ \| \lambda^{-\theta} u_0(\lambda) \|_{L^p_*\left(D_{\vec{A}}\right)} + \| \lambda^{1-\theta} u_1(\lambda) \|_{L^p_*(E)} \right\}$$

pour toutes les décompositions de u en somme $u_0 + u_1$, avec u_0 et u_1 vérifiant (7.1); on a donc

$$\| \varphi \|_{W_*\left(p\ -\theta, D_{\vec{A}}; p, 1-\theta, E\right)} \leq C \| u \|_{L^p_{-\theta-\frac{1}{p}}\left(D_{\vec{A}}\right) + L^p_{1-\theta-\frac{1}{p}}(E)},$$

ce qui prouve que $u \mapsto b$ est une application linéaire continue de

$$L^p_{-\theta-\frac{1}{p}}\left(D_{\vec{A}}\right) + L^p_{1-\theta-\frac{1}{p}}(E) \quad \text{dans} \quad \left(D_{\vec{A}}; E\right)_{\theta, p}.$$

L'identité $b = a$ pour $u(\lambda) = a$ pour $a \in (D_{\vec{A}}, E)_{\theta, p}$ résulte de la proposition 7.1.

7.2. On peut maintenant étendre partiellement les résultats du numéro 4 au cas de plusieurs opérateurs :

On donne deux espaces de Banach E_i $(i = 0, 1)$ contenus avec injections continues dans un même espace vectoriel topologique séparé $\mathcal{E}$. On donne également dans E_i, une famille $\vec{A}_i = \{ A_{1,i}, \ldots, A_{n,i} \}$ de n opérateurs linéaires fermés non bornés $i = 0, 1$; on note $D_{A_{k,i}}$ le domaine de $A_{k,i}$ dans E_i $(k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 0, 1)$; on suppose que $A_{k,i}$ vérifie l'hypothèse (H') dans E_i, c'est-à-dire que $(-A_{k,i} + \lambda)$ est inversible pour $\lambda > 0$ et

$$\| (-A_{k,i} + \lambda)^{-1} \|_{E_i \to E_i} \leq \frac{C_{k,i}}{\lambda}, \qquad (\lambda > 0,\ i = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

On suppose que $A_{k,0}$ et $A_{k,1}$ *coïncident dans* $D_{A_{k,0}} \cap D_{A_{k,1}}$ et que $(-A_{k,0} + \lambda)^{-1}$ et $(-A_{k,1} + \lambda)^{-1}$ coïncident dans $E_0 \cap E_1$ pour $\lambda > 0$.

Enfin on suppose que les opérateurs (bornés dans E_i) : $(-A_{k,i}+\lambda)^{-1}$ et $(-A_{l,i}+\mu)^{-1}$ commutent pour $k \neq l$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, $i = 0, 1$.

Comme au numéro 4 on définit l'opérateur non borné A_k de domaine $D_{A_k} = D_{A_{k,0}} + D_{A_{k,1}}$ dans $E = E_0 + E_1$, en posant

$$A_k a = A_{k,0} a_0 + A_{k,1} a_1$$

pour $a = a_0 + a_1$, $a_i \in D_{A_{k,i}}$ $(i = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

Alors A_k vérifie l'hypothèse (H') dans E, $k = 1, 2, \ldots, n$ et

$$D_{A_{k,i}} = \{ a \in D_{A_k} \cap E_i ;\ A_k a \in E_i \}$$

et $A_{k,i}$ est la restriction de A_k à $D_{A_{k,i}}$ $(i = 0,1,\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

On notera $D_{\overrightarrow{A}_i} = \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_{k,i}}$ $(i = 0,\ 1)$.

Ceci posé on a le

Théorème 7.2. — *Pour* $1 \leq p_i \leq +\infty$, $0 < t_i < 1$ $(i = 0, 1)$ *et* $0 < \theta < 1$, *on a l'identité*

$$\left[\left(D_{\overrightarrow{A}_0}, E_0 \right)_{t_0, p_0} ;\ \left(D_{\overrightarrow{A}_1}, E_1 \right)_{t_1, p_1} \right]_\theta = \left(\left[D_{\overrightarrow{A}_0}, D_{\overrightarrow{A}_1} \right]_\theta, \left[E_0, E_1 \right]_\theta \right)_{t_\theta, p_\theta},$$

avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \text{et} \qquad t_\theta = (1-\theta)\, t_0 + \theta\, t_1$$

et le

Théorème 7.2′. — *Pour* $1 \leq p_i \leq +\infty$, $0 < t_i < 1$ $(i = 0, 1)$ *et* $0 < \theta < 1$ *on a l'identité*

$$\left(\left(D_{\overrightarrow{A}_0}, E_0 \right)_{t_0, p_0} ;\ \left(D_{\overrightarrow{A}_1}, E_1 \right)_{t_1, p_1} \right)_{\theta, p_\theta} = \left(\left(D_{\overrightarrow{A}_0}, D_{\overrightarrow{A}_1} \right)_{\theta, p_\theta} ;\ \left(E_0, E_1 \right)_{\theta, p_\theta} \right)_{t_\theta, p_\theta},$$

avec

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad \text{et} \qquad t_\theta = (1-\theta)\, t_0 + \theta\, t_1.$$

Pour démontrer ces théorèmes on applique les théorèmes 2.1, 2.2, 2.1′, 2.2′, avec pour R l'opérateur

$$a \mapsto u(\lambda) = -\sum_{j=1}^{n} \lambda^n A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} a$$

et pour $\sum$ l'opérateur

$$u \mapsto b = -\sum_{j=1}^{n} \int_0^{+\infty} \lambda^{n-1} A_j (-A_j + \lambda)^{-1} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (-A_i + \lambda)^{-1} \right\} u(\lambda)\, d\lambda$$

qui ont les propriétés requises grâce aux propositions 7.1 et 7.2.

Remarque 7.1. — Au numéro 3 nous avons explicité $(D_{A^m}, E)_{\theta, p}$; pour généraliser complètement ces résultats au cas de plusieurs opérateurs qui commutent, il faudrait expliciter

$$\left(D_{A_1^{\alpha_1}} \cap \ldots \cap D_{A_n^{\alpha_n}}, E\right)_{\theta, p}$$

sous les hypothèses du point 7.1, pour tout multi-entier $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. De même pour généraliser complètement les résultats du numéro 4, il faudrait démontrer une identité de la forme :

$$\begin{aligned} &\left[\left(D_{A_{1,0}^{\alpha_1}} \cap \ldots \cap D_{A_{n,0}^{\alpha_n}}, E_0\right)_{t_0, p_0}; \left(D_{A_{1,1}^{\alpha_1}} \cap \ldots \cap D_{A_{n,1}^{\alpha_n}}, E_1\right)_{t_1, p_1}\right]_\theta \\ &\quad = \left(\left[D_{A_{1,0}^{\alpha_1}} \cap \ldots \cap D_{A_{n,0}^{\alpha_n}}, D_{A_{1,1}^{\alpha_1}} \cap \ldots \cap D_{A_{n,1}^{\alpha_n}}\right]_\theta, [E_0, E_1]_\theta\right)_{t_\theta, p_\theta} \end{aligned}$$

sous les hypothèses du point 7.2. Nous obtiendrons au numéro 8 des résultats de cette forme, en faisant quelques hypothèses supplémentaires.

7.3. Nous indiquons pour terminer ce numéro une situation plus simple, analogue à celle étudiée au numéro 5 et dans laquelle les théorèmes 7.2 et 7.2′ sont vrais : On suppose que *les deux espaces de Banach* E_i $(i = 0, 1)$ *sont contenus avec injections continues dans* $\mathcal{E}$ et que $A_1, \ldots, A_n$ *sont* n *opérateurs linéaires continus dans* $\mathcal{E}$, *qui commutent deux à deux et tels que* $(-A_k + \lambda)$ *soit un automorphisme de* $\mathcal{E}$ *pour* $\lambda > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

On définit les opérateurs $A_{k,i}$ en posant

$$\begin{aligned} &D_{A_{k,i}} = \{ a \in E_i ;\ A_k a \in E_i \}, \\ &A_{k,i} a = A a \qquad \text{pour} \quad a \in D_{A_{k,i}} \qquad (i = 0, 1), \end{aligned}$$

$A_{k,i}$ est un opérateur fermé dans E_i; on suppose de plus que $A_{k,i}$ vérifie l'hypothèse (H′) dans E_i, c'est-à-dire que $(-A_{k,i} + \lambda)$

est inversible dans E_i *pour* $\lambda > 0$ *et la majoration suivante a lieu*

$$\| (-A_{k,i} + \lambda)^{-1} \|_{E_i \to E_i} \leq \frac{C_{k,i}}{\lambda}, \qquad \lambda > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 0, 1).$$

Les théorèmes 7.2 et 7.2′ sont vrais sous ces hypothèses, avec

$$D_{\vec{A}_i} = \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_{k,i}} \qquad (i = 0, 1).$$

8. Une variante des résultats du numéro 7.

8.1. Revenons à la situation du point 1 du numéro 7 : On donne n opérateurs linéaires, non bornés, fermés dans E, qui vérifient l'hypothèse (H′) ainsi qu'une certaine hypothèse de commutativité (*voir* p. 181).

Comme nous l'avons déjà remarqué (remarque 7.1), pour généraliser complètement les résultats du numéro 3, il faudrait expliciter les espaces

$$\left(D_{\vec{A}}^{\vec{\alpha}}, E\right)_{\theta,p},$$

avec

$$D_{\vec{A}}^{\vec{\alpha}} = \bigcap_{k=1}^{n} D_{A_k^{\alpha_k}}, \qquad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

multi-entier tel que $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Nous ne savons pas résoudre ce problème sous les hypothèses du point 7.1; nous indiquerons simplement une situation moins générale dans laquelle ce problème se réduit à celui considéré au numéro précédent.

De manière générale, pour m entier > 0, on dira que l'opérateur A linéaire, non borné, fermé dans E, vérifie l'hypothèse (H'_m) si $(-A + \lambda)$ est inversible pour $\lambda \neq 0$, $\arg \lambda = \frac{2l\pi}{m}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$ et si pour ces λ la majoration suivante a lieu :

$$\| (-A + \lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leq \frac{C_A}{|\lambda|}.$$

Il est facile de voir qu'alors A^m vérifie l'hypothèse (H′) et par conséquent $A^m - I$ vérifie (H) : Cela résulte immédiatement de l'identité

$$(-A^m+\lambda)\,a=(-1)^{m-1}\left\{\prod_{l=0}^{m-1}\left(-A+\lambda^{\frac{1}{m}}e^{2\pi i\frac{l}{m}}\right)\right\}a$$

pour $\lambda>0$, $a\in D_{A^m}$.

Par conséquent si l'on suppose que A_k *vérifie* (H'_{α_k}) $(k=1, 2, \ldots, n)$ et que *les opérateurs* (bornés dans E) $(-A_k+\lambda)^{-1}$ et $(-A_j+\mu)^{-1}$ *commutent pour* λ, $\mu\neq 0$, $\arg\lambda$ *multiple entier de* $\frac{2\pi}{\alpha_k}$ *et* $\arg\mu$ *multiple entier de* $\frac{2\pi}{\alpha_j}$ $(k\neq j, k, j=1, \ldots, n)$, on a en appliquant le théorème 7.1 (avec A_k remplacé par $A_k^{\alpha_k}$), le

Théorème 8.1. — *Sous les hypothèses précédentes et pour* $0<\theta<1$, $1\leq p\leq\infty$, *on a l'identité*

$$(D_{\vec{A}^{\vec{\alpha}}}, E)_{\theta,p}=\bigcap_{k=1}^{n}(D_{A_k^{\alpha_k}}, E)_{\theta,p}, \tag{8.1}$$

c'est donc le sous-espace de E *formé des a tels que*

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^{+\infty}\|\lambda^{\alpha_k(1-\theta)}A_k^{\alpha_k}(-A_k+\lambda)^{-\alpha_k}a\|^p\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Remarque 8.1. — L'identité (8.1) est vraie pour tout multi-entier $\vec{\alpha}$, si chacun des opérateurs A_k est tel que $(-A_k+\lambda)^{-1}$ *existe pour* $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$ *et*

$$\|(-A_k+\lambda)^{-1}\|\leq\frac{C_k}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\qquad \textit{pour}\quad \mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$$

et si *les opérateurs* (bornés dans E) $(-A_k+\lambda)^{-1}$ *et* $(-A_j+\mu)^{-1}$ *commutent pour* $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$, $\mathrm{Re}\,\mu\neq 0$, $k\neq j$, $k, j=1, 2, \ldots, n$. En effet, il est facile de voir qu'en remplaçant A_k par $e^{i\theta(\alpha_k)}A_k$ [$\theta(\alpha_k)$ convenable], ce qui ne change pas D_{A_k} et $D_{A_k^{\alpha_k}}$, A_k vérifie (H'_{α_k}).

Remarque 8.2. — Les hypothèses de la remarque 8.1 sont vérifiées en particulier lorsque A_k *est le générateur infinitésimal*

d'un groupe $t \mapsto G_k(t)$ *continu et borné d'opérateurs linéaires continus dans* E, $k = 1, 2, \ldots, n$, si *les n groupes considérés commutent deux à deux*, i. e. $G_k(t)\, G_j(s) = G_j(s)\, G_k(t)$ pour $t, s \in \mathbf{R}$, $k \neq j$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$. Dans ce cas on a d'après [19] une caractérisation différente de celle fournie par le théorème 3.1 pour les espaces $(D_{A_k^{\alpha_k}}, E)_{\theta, p}$; utilisant la caractérisation de [19], on obtient ceci : $(D_{\vec{A}}\vec{\alpha}, E)_{\theta, p}$ est le sous-espace de E formé des $a \in D_{\vec{A}}\vec{\beta}$ et tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \int_0^{+\infty} t^{-p[\alpha_k(1-\theta)-\beta_k]} \| \{ G_k(t) - 1 \}^{\sigma_k} a \|^p \frac{dt}{t} \right\} < +\infty,$$

où $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, β_k étant le plus grand entier $< \alpha_k(1-\theta)$, $\sigma_k = 1$ lorsque $\alpha_k(1-\theta) < \beta_k + 1$ et $\sigma_k = 2$ lorsque

$$\alpha_k(1-\theta) = \beta_k + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

8.2. En utilisant le même procédé, nous donnons maintenant une extension simple des résultats du point 7.3.

On donne *deux espaces de Banach* E_i $(i = 0, 1)$ *contenus avec injections continues dans un espace vectoriel topologique séparé* $\mathcal{E}$ *et* $A_1, \ldots, A_n$, *une famille de n opérateurs linéaires continus dans* $\mathcal{E}$, *qui commutent deux à deux et tels que* $(-A_k + \lambda)$ *soit un automorphisme de* $\mathcal{E}$ *pour* $\lambda \neq 0 \arg \lambda$ *multiple entier de* $\frac{2\pi}{\alpha_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

On définit $A_{k,i}$ opérateur non borné, fermé dans E_i, comme restriction de A_k à

$$D_{A_{k,i}} = \{ a \in E_i,\ A_k a \in E_i \} \qquad (i = 0, 1, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On suppose que $A_{k,i}$ *vérifie* (H'_{α_i}) *dans* E_i $(i = 0, 1, k = 1, 2, \ldots, n)$.

On a alors les théorèmes suivants

Théorème 8.2. — *Sous les hypothèses précédentes et pour* $1 \leq p_i \leq +\infty$, $0 < t_i < 1$ $(i = 0, 1)$ *et* $0 < \theta < 1$ *on a l'identité*

$$\left(\left[D_{\vec{A}_0}\vec{\alpha}, E_0 \right)_{t_0, p_0}; \left(D_{\vec{A}_1}\vec{\alpha}, E_1 \right)_{t_1, p_1} \right]_\theta = \left(\left[D_{\vec{A}_0}\vec{\alpha}, D_{\vec{A}_1}\vec{\alpha} \right]_\theta, [E_0, E_1]_\theta \right)_{t_\theta, p_\theta},$$

avec

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad et \qquad t_0 = (1-\theta)\, t_0 + \theta t_1.$$

Théorème 8.2′. — *Sous les hypothèses précédentes et pour* $1 \leq p_i \leq +\infty$, $0 < t_i < 1$ $(i = 0,1)$ *et* $0 < \theta < 1$ *on a l'identité*

$$\left(\left(D_{\vec{\lambda}_0}\vec{\alpha}, E_0\right)_{t_0,p_0}; \left(D_{\vec{\lambda}_1}\vec{\alpha}, E_1\right)_{t_1,p_1}\right)_{\theta,p_0} = \left(\left(D_{\vec{\lambda}_0}\vec{\alpha}, D_{\vec{\lambda}_1}\vec{\alpha}\right)_{\theta,p_0}; (E_0, E_1)_{\theta,p_0}\right)_{t,p_0}$$

avec

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \qquad et \qquad t_0 = (1-\theta)\, t_0 + \theta t_1.$$

9. Application aux espaces de Sobolev en plusieurs variables.

9.1. Nous rappelons pour commencer la définition de certains espaces, qui ont été introduits par certains auteurs soviétiques ([23], [30]) pour généraliser les espaces de Sobolev :

Définition 9.1. — Pour $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, r_i entier ≥ 0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$, $W^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$ *désigne l'espace des* (*classes de*) *fonctions* $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *telles que*

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_i^l} \in L^p(\mathbf{R}^n) \qquad pour \quad 0 \leq l \leq r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{r_i} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_i^l}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 9.1. — Dans le cas $1 < p < +\infty$, $r_i = r (i = 1, 2, \ldots, n)$, on voit en appliquant le théorème de Mihlin [22] que $W^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$ est l'espace $W^{r,p}(\mathbf{R}^n)$ des fonctions u telles que

$$D^\alpha u \in L^p(\mathbf{R}^n) \qquad \text{pour} \quad |\alpha| \leq r.$$

On définit l'opérateur $\Delta_{i,t}$ par

$$\Delta_{i,t} f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n);$$

Pour s réel > 0, $s^\star$ désigne le plus grand entier $< s$.

DÉFINITION 9.2. — *Pour* $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, r_i *réel* > 0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, $B_q^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$ *est l'espace des (classes de) fonctions* $u \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *telles que*

$$1^0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r_1^*} u}{\partial x_1^{r_1^*}} \in L^p(\mathbf{R}^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$2^0 \qquad \left\{ \int_0^{+\infty} t^{-q\alpha_i} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left| \Delta_{i,t}^{k_i} \frac{\partial^{r_i^*} u}{\partial x_i^{r_i^*}}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

avec $\alpha_i = r_i - r^\star$, $k_i = 1$ *pour* $\alpha_i < 1$ *et* $k_i = 2$ *pour* $\alpha_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

C'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{r_i^*} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_i^l}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{+\infty} t^{-q\alpha_i} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left| \Delta_{i,t}^{k_i} \frac{\partial^{r_i^*} u}{\partial x_i^{r_i^*}}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Lorsque $p = q$, on a les espaces de Besov [23] [habituellement notés $B_p^{\vec{r}}(\mathbf{R}^n)$ et $B_p^r(\mathbf{R}^n)$ lorsque $r_i = r$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$] et lorsque $q = +\infty$, on a les espaces de Nikolskii [23] [habituellement notés $H_p^{\vec{r}}(\mathbf{R}^n)$ et $H_p^r(\mathbf{R}^n)$ lorsque $r_i = r$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$].

9.2. Prenons pour E l'espace $L^p(\mathbf{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$ et définissons l'opérateur $G_k(t)$ par

$$G_k(t)\, u(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_k + t, \ldots, x_n).$$

$t \mapsto G_k(t)$ est un groupe fortement continu et borné d'opérateurs dans $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Il est évident que ces n groupes commutent deux à deux; enfin le générateur infinitésimal de $G_k(t)$ est l'opérateur défini par

$$D_{A_k} = \left\{ u \in L^p(\mathbf{R}^n) ; \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^p(\mathbf{R}^n) \right\},$$

$$A_k u = \frac{\partial u}{\partial x_k} \qquad \text{pour} \quad u \in D_{A_k}.$$

Par conséquent, on a $W^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n) = D_{\vec{A}}^{\vec{r}}$, dans les notations des numéros précédents, et l'on est dans les conditions d'application du théorème 8.1 (*voir* les remarques 8.1 et 8.2 qui suivent l'énoncé de ce théorème).

On a donc le

THÉORÈME 9.1. — *Pour* $1 \leq p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ *on a l'identité*

$$\left(W^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n),\ L^p(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,q} = B_q^{(1-\theta)\vec{r},p}(\mathbf{R}^n).$$

9.3. Ensuite nous prenons pour E_i l'espace $L^{p_i}(\mathbf{R}^n)$ $(i = 0,1)$, $1 < p_0, p_1 < +\infty$, pour $\mathcal{E}$ l'espace $\mathcal{B}'(\mathbf{R}^n)$ (des distributions bornées dans $\mathbf{R}^n$) et pour A_k l'opérateur

$$u \mapsto \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

On vérifie facilement que les conditions d'application des théorèmes 8.2 et 8.2′ sont remplies; du théorème 8.2 on déduit l'identité

$$(9.1)\qquad \left[B_{q_0}^{(1-t_0)\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n);\ B_{q_1}^{(1-t_1)\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta = \left(\left[W^{\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n),\ W^{\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta;\ \left[L^{p_0}(\mathbf{R}^n),\ L^{p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta\right)_{t_0,q_0}$$

pour $0 < t_i < 1$, $1 < p_i < +\infty$, $1 \leq q_i \leq +\infty$ $(i = 0,1)$, avec

$$t_0 = (1-\theta)\,t_0 + \theta\,t_1, \qquad \frac{1}{q_0} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q_1};$$

puis du théorème 8.2′ on déduit l'identité

$$(9.2)\qquad \left(B_{q_0}^{(1-t_0)\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n);\ B_{q_1}^{(1-t_1)\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,q_\theta} = \left(\left(W^{\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n);\ W^{\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,q_\theta};\ \left(L^{p_0}(\mathbf{R}^n),\ L^{p_1}(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,q_\theta}\right)_{t_\theta,q_\theta}$$

pour $0 < t_i < 1$, $1 < p_i < +\infty$, $1 \leq q_i \leq +\infty$ $(i = 0,1)$, avec

$$t_\theta = (1-\theta)\,t_0 + \theta\,t_1, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Il y a des espaces inconnus dans les membres de droite des identités (9.1) et (9.2), il faut les expliciter. D'après [1] (*cf.* chap. 0, n° 2) on a

$$[\mathrm{L}^{p_0}(\mathbf{R}^n), \mathrm{L}^{p_1}(\mathbf{R}^n)]_\theta = \mathrm{L}^{p_\theta}(\mathbf{R}^n), \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Pour expliciter l'espace $\left[\mathrm{W}^{\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n), \mathrm{W}^{\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta$, on utilise le fait que l'opérateur

$$Q(D) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r_i} \frac{\partial^{2r_i}}{\partial x_i^{2r_i}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

(cet opérateur est défini par transformation de Fourier) est, d'après le théorème de Mihlin [22], un isomorphisme de $\mathrm{W}^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$ sur $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^n)$ pour tout $p \in]1, +\infty]$; on en déduit immédiatement par interpolation l'identité

$$\left[\mathrm{W}^{\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n), \mathrm{W}^{\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta = \mathrm{W}^{\vec{r},p_\theta}(\mathbf{R}^n)$$

et l'identité (9.1) s'écrit

$$\left[\mathrm{B}_{q_0}^{(1-t_0)\vec{r},p_0}(\mathbf{R}^n); \mathrm{B}_{q_1}^{(1-t_1)\vec{r},p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta = \mathrm{B}_{q_\theta}^{(1-t_\theta)\vec{r},p_\theta}(\mathbf{R}^n).$$

On a ainsi obtenu le théorème suivant :

Théorème 9.2. — *Si les vecteurs* $\vec{\mathrm{S}}_0$ *et* $\vec{\mathrm{S}}_1$ *sont proportionnels au même multi-entier à composantes strictement positives, on a l'identité*

$$\left[\mathrm{B}_{q_0}^{\vec{\mathrm{S}}_0,p_0}(\mathbf{R}^n); \mathrm{B}_{q_1}^{\vec{\mathrm{S}}_1,p_1}(\mathbf{R}^n)\right]_\theta = \mathrm{B}_{q_\theta}^{\vec{\mathrm{S}}_\theta,p_\theta}(\mathbf{R}^n)$$

pour $1 < p_i < +\infty$, $1 \leq q_i \leq +\infty$ $(i = 0, 1)$, $0 < \theta < 1$, *avec*

$$\vec{\mathrm{S}}_\theta = (1-\theta)\vec{\mathrm{S}}_0 + \theta\vec{\mathrm{S}}_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Remarque 9.1. — Ce théorème a été démontré dans [1] dans le cas particulier où les vecteurs $\vec{\mathrm{S}}_i$ ont toutes leurs composantes égales, i. e. $\vec{\mathrm{S}}_i = (\mathrm{S}_i, \ldots, \mathrm{S}_i)$ $(i = 0, 1)$.

Le même raisonnement, utilisant l'identité ([19] *cf.* chap. 0, n° 2)

$$(\mathrm{L}^{p_0}(\mathbf{R}^n),\ \mathrm{L}^{p_1}(\mathbf{R}^n))_{\theta,p_\theta} = \mathrm{L}^{p_\theta}(\mathbf{R}^n), \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

conduit au

THÉORÈME 9.3. — *Si les vecteurs* $\vec{\mathrm{S}}_0$ *et* $\vec{\mathrm{S}}_1$ *sont proportionnels au même multi-entier à composantes strictement positives, on a l'identité*

$$\left(\mathrm{B}^{\vec{\mathrm{S}}_0,p_0}_{p_0}(\mathbf{R}^n)\,;\ \mathrm{B}^{\vec{\mathrm{S}}_1,p_1}_{p_1}(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,p_\theta} = \mathrm{B}^{\mathrm{S}_\theta,p_\theta}_{p_\theta}(\mathbf{R}^n)$$

pour $1 < p_i < +\infty$ $(i = 0,1)$, $0 < \theta < 1$, *avec*

$$\vec{\mathrm{S}}_\theta = (1-\theta)\vec{\mathrm{S}}_0 + \theta \mathrm{S}_1, \qquad \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

9.4. Évidemment on peut aussi expliciter les espaces $\left(\mathrm{B}^{\vec{\mathrm{S}}_0,p_0}_{q_0}(\mathbf{R}^n)\,;\ \mathrm{B}^{\vec{\mathrm{S}}_1,p_1}_{q_1}(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,q_\theta}$, en utilisant les caractérisations données dans [28] des espaces $(\mathrm{L}^{p_0}(\mathbf{R}^n);\ \mathrm{L}^{p_1}(\mathbf{R}^n))_{\theta,q_\theta}$, ces espaces sont des « espaces de Lorentz » [21].

Nous nous contenterons d'un exemple qui montre le type de résultats qu'on obtient : Dans le cas où $q_0 = q_1 = q_\theta = +\infty$, on a pour $p_0 \neq p_1$, d'après [19] (*cf.* chap. 0, n° 2),

$$(\mathrm{L}^{p_0}(\mathbf{R}^n)\,;\ \mathrm{L}^{p_1}(\mathbf{R}^n))_{\theta,\infty} = \mathrm{M}^{\sigma_\theta}(\mathbf{R}^n) \qquad \text{avec} \quad \sigma_\theta = 1 \quad \frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

[$\mathrm{M}^{\sigma_\theta}(\mathbf{R}^n)$ espace de Lorentz, *cf.* chap. 0, n° 2 point 2.2.]

Il en résulte que

$$\left(\mathrm{B}^{\vec{\mathrm{S}}_0,p_0}_{\infty}(\mathbf{R}^n)\,;\ \mathrm{B}^{\vec{\mathrm{S}}_1,p_1}_{\infty}(\mathbf{R}^n)\right)_{\theta,\infty}$$

est l'espace des u telles que

$$\frac{\partial^l u}{\partial x_i^l} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \quad (l = 0,\ 1,\ \ldots\ \ \mathrm{S}^*_{\theta,i}) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

et que

$$\max_{\mathrm{E}} \frac{1}{|\mathrm{E}|^{\sigma_\theta}} \int_{\mathrm{E}} \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_i^l}(x) \right| dx < +\infty \quad (l = 0,\ 1,\ \ldots\ \ \mathrm{S}^*_{\theta,i})$$

et

$$\max_{t>0} \max_{\mathrm{E}} t^{-\alpha_{\theta,i}} \frac{1}{|\mathrm{E}|^{\sigma_\theta}} \int_{\mathrm{E}} \left| \Delta^{k_\theta,i}_{t,l} \frac{\partial^{\mathrm{S}^*_{\theta,i}} u}{\partial x_i^{\mathrm{S}^*_{\theta,i}}}(x) \right| dx < +\infty$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$ (le symbole $\max_{\mathrm{E}}$ désigne le maximum pris par rapport aux sous-ensembles $\mathrm{E} \subset \mathbf{R}^n$, qui sont mesurables et de mesure finie notée $|\mathrm{E}|$, pour la mesure de Lebesgue),

$$\vec{S}_0 = (S_{0,1}, \ldots, S_{0,n}), \qquad \alpha_{0,i} = S_{0,i} - S^*_{0,i}, \qquad k_{0,i} = [\alpha_{0,i}] + 1.$$

Cet exemple suffit à montrer l'extrême complexité des espaces ainsi obtenus.

9.5. Dans le cas particulier où $\vec{r} = (r, \ldots, r)$ on a coutume de noter les espaces $W^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$ et $B_q^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$, respectivement $W^{r,p}(\mathbf{R}^n)$ et $B_q^{r,p}(\mathbf{R}^n)$.

On définit ces espaces pour r de signe quelconque de la manière suivante :

1° Pour $r < 0$, par dualité :

$$W^{r,p}(\mathbf{R}^n) = (W^{-r,p'}(\mathbf{R}^n))',$$

pour r entier et $1 < p \leq +\infty$,

$$B_q^{r,p}(\mathbf{R}^n) = (B_{q'}^{-r,p'}(\mathbf{R}^n))',$$

pour r quelconque $1 < p, q < +\infty$.

2° Pour $r = 0$, par interpolation (10)

$$B_q^{0,p}(\mathbf{R}^n) = (W^{m,p}(\mathbf{R}^n), W^{-m,p}(\mathbf{R}^n))_{\ldots},$$

pour $1 < p, q \leq +\infty$ (on sait [19] que l'espace obtenu ne dépend pas du choix de l'entier $m > 0$).

Il résulte de [22] que pour tout r (réel de signe quelconque) et $1 < p < +\infty$, $1 < q + \leq \infty$ $(-\Delta + 1)$ est un isomorphisme de $B_q^{r,p}(\mathbf{R}^n)$ sur $B_q^{r-2,p}(\mathbf{R}^n)$.

Grâce à cette propriété d'isomorphisme il résulte des théorèmes 9.2 et 9.3 le

Corollaire 9.1. — *Pour r_i réels de signe quelconque, $1 < p_i < +\infty$, $1 < q_i \leq +\infty$ $(i = 0, 1)$ on a les identités*

$$[B_{q_0}^{r_0,p_0}(\mathbf{R}^n), B_{q_1}^{r_1,p_1}(\mathbf{R}^n)]_\theta = B_{q_\theta}^{r_\theta,p_\theta}(\mathbf{R}^n),$$

$$(B_{p_0}^{r_0,p_0}(\mathbf{R}^n), B_{p_1}^{r_1,p_1}(\mathbf{R}^n))_{\theta,p_\theta} = B_{p_\theta}^{r_\theta,p_\theta}(\mathbf{R}^n),$$

(10) On convient de noter $W^{0,p}(\mathbf{R}^n) = L^p(\mathbf{R}^n)$.

avec

$$r_0=(1-0)\,r_0+0r_1, \qquad \frac{1}{p_0}=\frac{1-0}{p_0}+\frac{0}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_0}=\frac{1-0}{q_0}+\frac{0}{q_1}.$$

10. Quelques théorèmes d'interpolation.

10.1. Les résultats des numéros 3, 4, 5, 7 et 8, contiennent implicitement de nombreux théorèmes d'interpolation, puisque à chaque caractérisation d'un espace intermédiaire construit par la méthode réelle ou la méthode complexe, correspond un théorème d'interpolation (*voir* chap. 0).

Ainsi par exemple, on déduit du théorème 6.1 le résultat suivant d'interpolation où X_i $(i=0, 1)$ sont deux espaces de Banach contenus avec injections continues dans l'espace séparé $\mathcal{X}$: Soit H un opérateur linéaire continu de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{B}'(\mathbf{R})$ et tel que :

H est linéaire continu de X_i dans $B_{q_i}^{s_i,p_i}$ pour $i=0, 1$, alors H est linéaire continu de $[X_0, X_1]_0$ dans $B_{q_0}^{s_0,p_0}$ avec

$$s_0=(1-0)\,s_0+0s_1, \qquad \frac{1}{p_0}=\frac{1-0}{p_0}+\frac{0}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_0}=\frac{1-0}{q_0}+\frac{0}{q_1}.$$

Un théorème d'interpolation de ce type joint à un théorème d'immersion pour les espaces $B_{q_0}^{s_0,p_0}$ (variante du théorème de Sobolev) fournit un résultat d'interpolation d'une forme inhabituelle; dans l'exemple ci-dessus lorsque $p_0=q_0=2$ et $s_0<\frac{1}{2}$. on a classiquement

$$B_{q_0}^{s_0,p_0}=H^{s_0}\subset L^{r_0} \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{r_0}=\frac{1}{2}-s_0$$

et par conséquent H est linéaire continu de $[X_0, X_1]_0$ dans L^{r_0}.

Nous allons utiliser systématiquement cette remarque. Nous retrouverons en particulier les principaux résultats de [31] et [2].

10.2. Nous rappelons tout d'abord la définition des « espaces d'Orlicz » [10].

Soit $t\mapsto\Phi(t)$ une fonction numérique positive, définie pour $t>0$, continue, non décroissante et *convexe*, telle que $\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(t)}{t}=0$

et que $\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=+\infty$; on désigne par $L^{\Phi}(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables dans Ω et telles qu'il existe $\lambda>0$ avec

$$\int_{\Omega}\Phi(\lambda\ u(x)\ )\,dx\quad 1.$$

$L^{\Phi}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$u\mapsto\inf\left\{\lambda^{-1};\ \int_{\Omega}\Phi(\lambda\,|\,u(x)\,|)\,dx\leq 1\right\}.$$

Dans la suite les seuls espaces d'Orlicz que nous utiliserons sont ceux correspondant à la fonction

$$\Phi_p(t)=\sum_{k\geq p}\frac{t^k}{k!}. \tag{10.1}$$

Dans la suite, lorsque nous considérerons ces espaces avec $\Omega=\mathbf{R}$ nous omettrons d'écrire $\mathbf{R}$: Nous écrirons $L^{\Phi}=L^{\Phi}(\mathbf{R})$; de même nous écrirons $M^{\sigma}=M^{\sigma}(\mathbf{R})$ (espace de Lorentz : *voir* chap. 0, n° 2, point 2.2).

10.3. Nous allons d'abord prouver un analogue « abstrait » du théorème de Stampacchia [31]; dans l'énoncé suivant $X_i(i=0,1)$ sont deux espaces de Banach contenus avec injections continues dans le même espace vectoriel topologique séparé $\mathfrak{X}$.

Théorème 10.1. — *On considère un opérateur* Π *linéaire continu de* $\mathfrak{X}$ *dans* L^{1}_{loc} *qui opère de*

1° X_0 *dans* $M^{\sigma}(0\leq\sigma<1)$;

2° X_1 *dans* $C^{\alpha}(\alpha>0)$.

Alors pour $0<\theta<1$, Π *est linéaire continu de* $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ *dans*

$M^{\sigma+(\alpha+1-\sigma)\theta}$ *pour* $0<\frac{1-\sigma}{\alpha+1-\sigma}$,

$W^{k,L^{\Phi_p}}$ *pour* $\theta=\frac{k+1-\sigma}{\alpha+1-\sigma}$ $(k=0,1,2,\ldots)$, $\left(p>\frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)}\right)$,

$C^{\sigma+(\alpha+1-\sigma)\theta-1}$ *pour* $\frac{k+1-\sigma}{\alpha+1-\sigma}<\theta<\frac{k+2-\sigma}{\alpha+1-\sigma}$ $(k=0,1,2\ldots)$.

Démonstration. — De la définition même des espaces de moyennes, résulte que pour $0<\theta<1$, H est linéaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ dans $(M^\sigma, C^\alpha)_{\theta,\infty}$.

Ensuite on utilise les résultats du point 5.6 avec $E_0 = M^\sigma$ et $E_1 = L^\infty$: on a d'après (5.7)

$$E_0 = W^{0,E_0} \subset B^{0,E_0}_\infty,$$

et d'après l'appendice 1, on a l'inclusion

$$C^\alpha \subset B^{\alpha,E_1}_\infty,$$

d'où

$$(M^\sigma; C^\alpha)_{\theta,\infty} \subset (B^{0,E_0}_\infty; B^{\alpha,E_1}_\infty)_{\theta,\infty}$$

et d'après (5.4) cet espace est

$$B^{\alpha\theta,(E_0,E_1)_{\theta,\infty}}_\infty$$

Nous connaissons l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,\infty}$, grâce à [19], c'est $M^{(1-\theta)\sigma+\theta}$.

Par conséquent pour $0<\theta<1$, H est linéaire continu de $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ dans $B^{\alpha\theta, M^{(1-\theta)\sigma+\theta}}_\infty$, et le théorème 10.1 résulte du lemme suivant (qui est une variante du classique « théorème d'immersion » de Sobolev).

LEMME 10.1. — *Pour* $S>0$ *et* $0<\tau<1$, *on a les immersions suivantes :*

1° $B^{S, M^\tau}_\infty \subset C^{S+\tau-1}$ *pour* $S+\tau-1>0$ *non entier*;

2° $B^{S, M^\tau}_\infty \subset W^{k, L^{\Phi_p}}$ *pour* $S+\tau-1=k$ $(k=0, 1, 2\ldots)$, *avec* $p>\frac{1}{1-\tau}$;

3° $B^{S, M^\tau}_\infty \subset M^{\tau+S}$ *pour* $S+\tau-1<0$.

Ce lemme résulte du suivant qui est démontré dans l'appendice n° 2 :

LEMME 10.1′. — *Pour* $S>0$ *et* $1<p<+\infty$, *on a les immersions suivantes :*

1° $B^{S,p}_\infty \subset C^{S-\frac{1}{p}}$ *pour* $S-\frac{1}{p}>0$ *non entier*;

2° $B^{S,p}_\infty \subset W^{L, k^{\Phi_p}}$ *pour* $S-\frac{1}{p}=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$;

3° $B^{S,p}_\infty \subset M^{1+S-\frac{1}{p}}$ *pour* $S-\frac{1}{p}<0$.

Démonstration du lemme 10.1. — S et τ étant fixés on peut choisir S_i et p_i $(i=0, 1)$ tels que

$$S_i > 0, \quad 1 < p_i < +\infty \quad (i=0, 1) \qquad \text{et} \qquad S_i - \frac{1}{p_i} = s - (1-\tau) \quad (i=0, 1).$$

avec (par exemple) $p_0 < \frac{1}{1-\tau} < p_1$.

Si θ est tel que $(1-\tau) = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, on a d'après [19], $(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta,\infty} = M^\tau$; puis comme $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, on a d'après (5.4) :

$$B_\infty^{s, M^\tau} = (B_\infty^{s_0, p_0}; B_\infty^{s_1, p_1})_{\theta,\infty},$$

Pour $S + \tau - 1 > 0$ non entier on a

$$S_i > \frac{1}{p_i} \quad (i=0, 1) \qquad \text{et} \qquad S_i - \frac{1}{p_i} = S - (1-\tau),$$

d'où

$$B_\infty^{s_i, p_i} \subset C^{S-(1-\tau)} \qquad (i=0, 1)$$

et par conséquent $B^{s, M^\tau} \subset C^{S-(1-\tau)}$.

Pour $S + \tau - 1 = k$ entier on a

$$S_i - \frac{1}{p_i} = k \qquad (i=0, 1),$$

d'où

$$B_\infty^{s_i, p_i} \subset W^{k, L^{p_i}} \qquad (i=0, 1),$$

et par conséquent $B_\infty^{s, M^\tau} \subset W^{k, L^{p_i}}$

Enfin pour $S < 1 - \tau$ on a

$$S_i < \frac{1}{p_i} \quad (i=0, 1) \qquad \text{et} \qquad S_i - \frac{1}{p_i} = S - (1-\tau),$$

d'où

$$B_\infty^{s_i, p_i} \subset M^{\tau+s} \qquad (i=0, 1)$$

et par conséquent $B_\infty^{s, M^\tau} \subset M^{\tau+s}$.

Le lemme est complètement démontré.

On peut préciser le résultat du théorème 10.1 lorsque $0 < \frac{1-\sigma}{\alpha+1-\sigma}$: D'après [19] on a l'identité

$$(M^{S_0}, M^{S_1})_{t,\rho} = L^\rho$$

pour $\frac{1}{\rho} = 1 - S_0(1-t) + S_1 t$, $0 < t < 1$, $(S_0 \neq S_1)$, d'où le

Corollaire 10.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 10.1, II *opère de* $(X_0, X_1)_{\theta, \frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)-\theta\alpha}}$ *dans* $L^{\frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)-\theta\alpha}}$ *pour* $1-\theta > \frac{\alpha}{\alpha+1-\sigma}$.

Démonstration. — On peut choisir θ_i $(i = 0, 1)$ tel que $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$, avec

$$\theta_i < \frac{1-\sigma}{\alpha+1-\sigma} \qquad (i = 0, 1),$$

ce qui permet d'écrire, en posant $\frac{1}{\rho} = (1-\theta)(1-\sigma) - \theta\alpha$ l'identité :

$$(X_0, X_1)_{\theta,\rho} = ((X_0, X_1)_{\theta_0, \ldots}, (X_0, X_1)_{\theta_1, \ldots})_{t,\rho},$$

avec $\theta = (1-t)\theta_0 + t\theta_1$, d'après le théorème de réitération (chap. 0, n° 1, point 1.4).

Utilisant le théorème 9.1 nous voyons alors que II opère de $(X_0, X_1)_{\theta,\rho}$ dans $(M^{\sigma+\theta_0(\alpha+1-\sigma)}, M^{\sigma+\theta_1(\alpha+1-\sigma)})_{t,\rho} = L^{\rho}$, car

$$\frac{1}{\rho} = 1 - [\sigma + \theta_0(\alpha+1-\sigma)](1-t) - [\sigma + \theta_1(\alpha+1-\sigma)]t.$$

10.4. Appliquons les résultats précédents avec $X_0 = L^{p_0}$ et $X_1 = L^{p_1}$. Nous obtenons ceci : II opère de

$$L^{p_0}\left(\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right)$$

et même de $M^{1-\frac{1}{p_0}}$ dans $M^{\sigma+\theta(\alpha+1-\sigma)}$ pour $\theta < \frac{1-\sigma}{\alpha+1-\sigma}$ dans $W^{k,L^{\rho}}$ pour

$$\left[\theta = \frac{k+1-\sigma}{\alpha+1-\sigma} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \rho > \frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)}\right]$$

et dans $C^{\sigma+\ldots\alpha+1-\sigma+\theta-1}$ pour

$$\frac{k+1-\sigma}{\alpha+1-\sigma} < \theta < \frac{k+2-\sigma}{\alpha+1-\sigma} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si de plus on a $p_0 \leq \frac{1}{1-\sigma}$, alors Π opère de L_{p_0} dans $L^{\frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)-\theta\alpha}}$ $\left(\text{car on a alors } p_0 \leq \frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)-\theta\alpha}\right)$, pour $\theta < \frac{1-\sigma}{\alpha+1-\sigma}$.

Si au contraire on a $p_0 > \frac{1}{(1-\sigma)}$, alors Π opère de L^{p_0} dans

$$L^{\frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)-\theta\sigma}} \quad \text{pour} \quad \frac{\alpha}{\alpha+1-\sigma} < 1-\theta \leq \frac{\alpha+\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_0}+\alpha+1-\sigma}$$

$\left(\text{car pour ces valeurs de } \theta \text{ on a encore } p_0 \leq \frac{1}{(1-\theta)(1-\sigma)-\theta\alpha}\right)$.

10.5. Par restriction on obtient des résultats analogues pour les fonctions définies dans un intervalle borné; par exemple l'intervalle (0,1). Nous allons détailler ce point.

Dans le cas de l'intervalle (0,1) la condition 1° du théorème 10.1 peut s'exprimer de la manière suivante (*cf.* [36]) :

$$(10.3) \qquad \left|\{x \in (0,1);\ |(\Pi.a)(x)| \geq t\}\right| \leq \left(\frac{C\,\|a\|_{X_0}}{t}\right)^q,$$

avec $q = \frac{1}{(1-\sigma)}$. Pour notre objet il suffit de voir que cette condition implique que Π est linéaire continu de X_0 dans $M^\sigma(0,1)$:

Posons $u = \Pi.a$ et soit $u^\star(x)$ le réarrangement décroissant de $|u|$ dans $(0,1)$; de (10.3) on déduit la majoration $u^\star(x) \leq \frac{C\,\|a\|_{X_0}}{x^{\frac{1}{q}}}$.

D'après le lemme 13.9 de [36], on a pour E ensemble mesurable $\subset (0,1)$ l'inégalité :

$$\int_E |u(x)|\,dx \leq \int_0^{|E|} u^\star(x)\,dx,$$

d'où

$$\int_E |u(x)|\,dx \leq C\,\|a\|_{X_0} \int_0^{|E|} \frac{dx}{x^{\frac{1}{q}}} = C\,\|a\|_{X_0} \frac{1}{\sigma} |E|^\sigma$$

et par conséquent on a $u \in M^\sigma(0,1)$ et

$$\|u\|_{M^\sigma(0,1)} \leq \frac{C}{\sigma}\,\|a\|_{X_0},$$

ce qui prouve que Π est linéaire continu de X_0 dans $M^\sigma(0, 1)$. On a donc le :

THÉORÈME 10.2. — *On considère un opérateur* Π *linéaire continu de* $\mathfrak{X}$ *dans* $L^1(0, 1)$ *et tel que*

$$1^\circ \quad \left|\{x \in (0, 1); |(\Pi . a)(x)| \geq t\}\right| \leq \left(\frac{C \| a \|_{X_0}}{t}\right)^q \qquad (1 < q < \infty);$$

2° Π *est continu de* X_1 *dans* $C^\alpha(0, 1)$ $(\alpha > 0)$.

Alors pour $0 < \theta < 1$, X *est linéaire continu de* $(X_0, X_1)_{\theta, \infty}$ *dans*

$$M^{1-\frac{1}{q}+\theta\left(\alpha+\frac{1}{q}\right)}(0, 1) \qquad \text{pour} \quad \theta < \frac{\frac{1}{q}}{\alpha + \frac{1}{q}},$$

$$W^{k, L^{\Phi_2}(0,1)} \qquad \text{pour} \quad \theta = \frac{k + \frac{1}{q}}{\alpha + \frac{1}{q}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$C^{\theta\left(\alpha+\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{q}}(0, 1) \qquad \text{pour} \quad \frac{k + \frac{1}{q}}{\alpha - \frac{1}{q}} < \theta < \frac{k + 1 + \frac{1}{q}}{\alpha - \frac{1}{q}} \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

De plus pour $\theta < \dfrac{\frac{1}{q}}{\alpha + \frac{1}{q}}$, Π *opère de*

$$(X_0, X_1)_{\theta, \frac{1}{\frac{1}{q}-\theta\left(\alpha-\frac{1}{q}\right)}} \quad \text{dans} \quad L^{\frac{1}{\frac{1}{q}-\theta\left(\alpha+\frac{1}{q}\right)}}(0, 1).$$

Exemple. — Cet énoncé appliqué avec $X_i = L^{p_i}(0, 1)$ $(i = 0, 1)$ et $p_0 \leq q$ redonne le principal théorème d'interpolation de [31] dans le cas des fonctions d'une variable.

10.6. La méthode précédente correctement généralisée permet d'obtenir des résultats analogues pour les fonctions de plusieurs variables

THÉORÈME 10.3. — *On considère un opérateur* Π *linéaire continu de* $\mathfrak{X}$ *dans* $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ *qui opère de*

1° X_0 *dans* $L^q(\mathbf{R}^n)$ $(1 \leq q < \infty)$;

2^0 X_1 *dans* $C^\alpha(\mathbf{R}^n)$ $(\alpha > 0)$.

Alors pour $0 < \theta < 1$, II *est linéaire continu de* $[X_0, X_1]_\theta$ *dans*

$$M^{1-\frac{1-\theta}{q}+\frac{\alpha\theta}{n}}(\mathbf{R}^n) \qquad \textit{pour} \quad 0 < \frac{\frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}},$$

$$W^{k,L^{\rho}}(\mathbf{R}^n) \qquad \textit{pour} \quad \theta = \frac{k + \frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \quad \textit{avec} \ \rho = \frac{q}{1-\theta},$$

$$C^{\alpha\theta - \frac{n(1-\theta)}{q}}(\mathbf{R}^n) \qquad \textit{pour} \quad \frac{k + \frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}} < \theta < \frac{k + 1 + \frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Corollaire 10.2. — *Sous les mêmes hypothèses* II *opère de* $(X_0, X_1)_{\theta, \frac{1}{1-\theta-\frac{\alpha\theta}{n}}}$ *dans*

$$L^{\frac{1}{(1-\theta)\frac{1}{q}-\frac{\alpha\theta}{n}}}(\mathbf{R}^n) \qquad \textit{pour} \quad 0 < \frac{\frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}}.$$

Démonstration. — Évidemment II est linéaire continu de $[X_0, X_1]_\theta$ dans $[L^q(\mathbf{R}^n); C^\alpha(\mathbf{R}^n)]_\theta$ l'inconnue est ce dernier espace; considérons provisoirement les fonctions numériques de n variables réelles $x_1, \ldots, x_n$ comme fonctions à valeurs vectorielles des $n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ (à valeurs dans des espaces de fonctions de la seule variable x_i) nous avons évidemment

$$L^q(\mathbf{R}^n) = L^q(\mathbf{R}^{n-1}; L^q),$$
$$C^\alpha(\mathbf{R}^n) \subset L^\infty(\mathbf{R}^{n-1}; C^\alpha),$$

d'où

$$[L^q(\mathbf{R}^n); C^\alpha(\mathbf{R}^n)]_\theta \subset L^{\frac{q}{1-\theta}}(\mathbf{R}^{n-1}; [L^q; C^\alpha]_\theta);$$

d'après le numéro 5, point 2 (avec $E_0 = L^q$, $E_1 = L^\infty$) on a

$$[L^q; C^\alpha]_\theta \subset [B_\infty^{0,q}; B_\infty^{\alpha,\infty}]_\theta = B_\infty^{\alpha\theta, \frac{q}{1-\theta}}$$

et

$$[\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n);\ \mathrm{C}^\alpha(\mathbf{R}^n)]_\theta \subset \mathrm{L}^{\frac{q}{1-\theta}}\left(\mathbf{R}^{n-1};\ \mathrm{B}_\infty^{\alpha\theta,\ \frac{q}{1-\theta}}\right);$$

pour u appartenant à ce dernier espace on a

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\max_{t>0} t^{-\alpha\theta} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{t,i} u(x_1, x_n)|^{\frac{q}{1-\theta}} dx_i \right\}^{\frac{1-\theta}{q}} \right)^{\frac{q}{1-\theta}} dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n < +\infty,$$

d'où

$$\max_{t>0} t^{-\alpha\theta} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |\Delta_{t,i} u(x)|^{\frac{q}{1-\theta}} dx \right)^{\frac{1-\theta}{q}} < +\infty. \tag{10.4}$$

Pour $u \in [\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n);\ \mathrm{C}^\alpha(\mathbf{R}^n)]_\theta$, la condition (10.4) est vérifiée pour $i = 1, 2, \ldots, n$; on a donc (*voir* n° 9) l'inclusion

$$[\mathrm{L}^q(\mathbf{R}^n);\ \mathrm{C}^\alpha(\mathbf{R}^n)]_\theta \subset \mathrm{B}_\infty^{\alpha\theta,\ \frac{q}{1-\theta}}(\mathbf{R}^n).$$

Comme dans le cas des fonctions d'une variable, le théorème résulte d'une variante du classique « théorème d'immersion » de Sobolev, *voir* lemme ci-dessous; et le corollaire résulte du théorème par une nouvelle application de l'interpolation utilisant [19].

Lemme 10.2. — *Pour* $\mathrm{S} > 0$, $1 < p < +\infty$ *on a les immersions suivantes :*

1° $\mathrm{B}_\infty^{\mathrm{S},p}(\mathbf{R}^n) \subset \mathrm{C}^{\mathrm{S}-\frac{n}{p}}(\mathbf{R}^n)$ *pour* $\mathrm{S} - \dfrac{n}{p} > 0$ *non entier*;

2° $\mathrm{B}_\infty^{\mathrm{S},p}(\mathbf{R}^n) \subset \mathrm{W}^{k,\mathrm{L}^{\Phi_p}}(\mathbf{R}^n)$ *pour* $\mathrm{S} - \dfrac{n}{p} = k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$;

3° $\mathrm{B}_\infty^{\mathrm{S},p}(\mathbf{R}^n) \subset \mathrm{M}^{1-\frac{1}{p}+\frac{\mathrm{S}}{n}}(\mathbf{R}^n)$ *pour* $\mathrm{S} < \dfrac{n}{p}$.

Ce lemme, qui généralise au cas de plusieurs variables le lemme 10.1′, est démontré dans l'appendice numéro 2.

Remarque 10.3. — Par restriction on obtient des résultats analogues pour les fonctions définies (par exemple) dans un cube

$$\mathrm{Q} = \{\, |x_i| \leq \mathrm{N} \,\}.$$

Par exemple prenons $X_i = L^{p_i}(Q)\,(i = 0, 1)$, $1 \leq p_i \leq +\infty$, $p_0 \leq q$, nous obtenons ceci :

Si II *est un opérateur linéaire continu dans* $L^1(Q)$ *tel que*

1° II *opère de* $L^{p_0}(Q)$ *dans* $L^q(Q)\,(p_0 \leq q < \infty)$;

2° II *opère de* $L^{p_1}(Q)$ *dans* $C^\alpha(Q)$ $(\alpha > 0)$.

Alors pour $0 < \theta < 1$, II *opère de*

$$L^{p_\theta}(Q) \quad \left(\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ 0 < \theta < 1\right)$$

dans

$$L^{\frac{1}{(1-\theta)\frac{1}{q} - \frac{\alpha\theta}{n}}}(Q) \qquad \textit{pour} \quad \theta < \frac{\frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}},$$

$$W^{k, L^{q_2}(Q)} \qquad \textit{pour} \quad \theta = \frac{k + \frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$C^{\alpha\theta - \frac{n(1-\theta)}{q}}(Q) \qquad \textit{pour} \quad \frac{k + \frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}} < \theta < \frac{k + 1 + \frac{n}{q}}{\alpha + \frac{n}{q}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

C'est le théorème de [31] en n variables dans le cas des opérateurs de « type fort ».

CHAPITRE II.

Étude de certains problèmes de traces.

Le problème de déterminer les traces sur un sous-espace Γ de dimension $n-1$ dans $\mathbf{R}^n$, des fonctions d'un espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ a été étudié par un grand nombre d'auteurs. On peut généraliser ce problème dans deux directions différentes.

La première généralisation que nous considérons au paragraphe 1, consiste à déterminer les traces sur Γ, de fonctions appartenant à des espaces déduits par interpolation des espaces de Sobolev $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$. Ce problème a déjà été résolu dans des cas particuliers dans ([23], [32], [35]), dont nous retrouverons les résultats par une méthode plus générale. Tous ces espaces étant de type local il suffit d'étudier les traces sur un hyperplan de coordonnées $\Gamma = \{t = 0\}$; alors si nous considérons $u \in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ comme fonction de $t > 0$ seulement, nous avons (dans des notations évidentes)

$$u^{(j)} \in L^p(0, +\infty; W^{m-j,p}(\Gamma)) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).$$

Nous généraliserons ces espaces en considérant l'espace des fonctions u telles que

$$u^{j)} \in \mathrm{L}^p(0, +\infty; \mathrm{D}_{A^{m-j}}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m),$$

où A est un opérateur vérifiant l'hypothèse (H) du chapitre I. Nous déterminerons les traces pour $t = 0$ [i. e. l'espace décrit par $u^{(k)}(0)$ pour des valeurs convenables de k] des fonctions appartenant à ces espaces et aux espaces qu'on en déduit par interpolation. Les résultats de ce paragraphe sont donc des résultats de traces pour des fonctions d'une variable. Dans ce paragraphe nous utiliserons systématiquement les résultats du chapitre I.

La seconde généralisation, que nous considérerons au paragraphe 2, consiste à étudier les traces sur des sous-espaces Γ de dimension $< n-1$ dans $\mathbf{R}^n$ des fonctions appartenant à $\mathrm{W}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ ou aux espaces plus généraux $\mathrm{W}^{\vec{r},p}(\mathbf{R}^n)$ (qui sont définis par des conditions de dérivabilité différentes par rapport aux diverses variables). Nous généraliserons ces espaces en considérant des espaces analogues de fonctions à valeurs vectorielles (les fonctions et leurs dérivées prenant leurs valeurs dans des espaces différents comme au paragraphe précédent). Les résultats de ce paragraphe sont donc des résultats de traces par rapport à plusieurs variables; ils sont utiles dans l'étude de certains problèmes aux limites pour des opérateurs non elliptiques ([26, [30]).

Les problèmes étudiés aux paragraphes 1 et 2 sont étroitement liés pour la raison suivante, que nous exposons sur un exemple simple : Comme nous le verrons, la trace $\varphi = u|_{x_n=0}$ d'une fonction $u \in \mathrm{W}^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ sur le sous-espace $\{x_n = 0\}$ est une fonction $\varphi \in \mathrm{W}^{m-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1})$ qui est un espace d'interpolation entre $\mathrm{W}^{m,p}(\mathbf{R}^{n-1})$ et $\mathrm{W}^{m-1,p}(\mathbf{R}^{n-1})$; par conséquent il revient au même d'étudier la trace de u sur $\{x_n = x_{n-1} = 0\}$, (ce qui est un problème de traces en plusieurs variables) et d'étudier la trace de φ sur $\{x_{n-1} = 0\}$, (ce qui est un problème de traces en une variable mais pour une fonction appartenant à un espace défini par interpolation).

§ 1. Traces de certains espaces fonctionnels définis par interpolation.

1. Préliminaires.

1.1. Les données sont les suivantes : E est un espace de Banach (complexe), de norme

$$a \mapsto \| a \|$$

et A est un opérateur linéaire non borné, fermé de domaine D_A dans E, et qui vérifie l'hypothèse (H) du chapitre I, n° 3, i. e.

(H) $\qquad (-A+\lambda)^{-1}$ existe pour $\lambda \geqq 0$

et

$$\| (-A+\lambda)^{-1} \|_{E \to E} \leqq \frac{C_A}{\lambda + 1}.$$

Comme au chapitre 1, n° 5, nous noterons

$$W^{m,E} = D_{A^m} \quad (11)$$

pour m entier $\geqq 0$; $W^{m,E}$ est un espace de Banach pour la norme $a \mapsto \| A^m a \|$.

Toujours comme au chapitre I, n° 5, nous posons

$$B_\theta^{S,E} = (W^{m,E}, W^{n,E})_{\theta,q}$$

pour m, n entiers positifs, avec $m > S > n$, (θ tel que $S = m(1-\theta) + n\theta$) et $1 \leqq q \leqq \infty$.

D'après la remarque 5.1, chap. I, n° 5, l'espace ainsi obtenu ne dépend pas, à une équivalence de normes près, du choix particulier de m et n (12).

$L_\alpha^p(W^{k,E})$ désigne l'espace des (classes de) fonctions $t \mapsto u(t)$ définies p. p. pour $t > 0$, fortement mesurables à valeurs dans $W^{k,E}$ et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \| t^\alpha u(t) \|_{W^{k,E}}^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

---

(11) $W^{0,E} = E$.

(12) Nous éviterons ici l'emploi des espaces $W^{-m,E}$ qui ne seront pas utiles dans la suite de ce paragraphe.

Définition 1.1. — $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ *désigne l'espace des classes de fonctions* $t \mapsto u(t)$ *définies p. p. pour* $t > 0$, *et telles que*

$$A^k u^{(j)}(t) \in L^p_\alpha(E) \qquad \textit{pour} \quad k + j \leq m.$$

Il revient au même de définir $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ comme espace des fonctions $t \mapsto u(t)$ telles que

$$u^{(j)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-j,E}) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m);$$

$W^{m,L^p_\alpha(E)}$ est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \sum_{j=0}^{m} \left\{ \int_0^{+\infty} \| t^\alpha A^{m-j} u^{(j)}(t) \|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Enfin nous posons la

Définition 1.2. — *Pour* S *réel* $\in]m, m+1[$ *on pose*

$$W^{S,L^p_\alpha(E)} = \left(W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m,L^p_\alpha(E)} \right)_{\theta,p},$$

avec θ *tel que* $S = m + 1 - \theta$.

Les espaces $W^{S,L^p_\alpha(E)}$ sont donc définis pour tout S réel ≥ 0, $1 \leq p \leq +\infty$, α réel quelconque; ces espaces sont des généralisations naturelles des espaces de Sobolev [lorsque $\alpha = 0$, $E = L^p(\mathbf{R})$, $A = -\frac{d}{dx} + 1$, $W^{m,E} = W^{m,p}(\mathbf{R})$, l'espace $W^{S,L^p_\alpha(E)}$ coïncide avec l'espace noté habituellement $W^{S,p}(\mathbf{R}^2_+)$, $\mathbf{R}^2_+$ désignant le demi-espace $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;\ x_2 > 0\}$; nous reviendrons sur ce point au numéro 5].

1.2. Le but de ce paragraphe est de déterminer les traces des espaces $W^{S,L^p_\alpha(E)}$; c'est-à-dire de chercher sous quelles conditions sur les divers paramètres S, p et α, l'opérateur

$$u \mapsto u^{(j)}(0)$$

(qui est défini pour les fonctions j fois continûment dérivables à valeurs dans E) peut se prolonger à l'espace $W^{S,L^p_\alpha(E)}$, et de déterminer l'image de l'opérateur ainsi prolongé.

Dans le cas particulier, où S est entier, $0 < \alpha + \frac{1}{p} < 1$ et $A + 1$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu et borné d'opérateurs dans E, ce problème a été résolu dans [15]. Nous donnerons pour commencer au numéro 2 une extension des résultats de [15], au cas des espaces $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ (m entier) considérés ici. Au numéro 3 nous démontrerons des résultats analogues pour les espaces $W^{S, L^p_\alpha(E)}$, puis dans le numéro 4 nous considérerons quelques variantes des espaces introduits dans ce numéro. Enfin aux numéros 5 et 6 nous donnerons quelques applications de ces résultats à l'étude des espaces de Sobolev; nous retrouverons en particulier de nombreux théorèmes de traces démontrés dans ([24], [32], [35]).

2. Traces des espaces $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ (m entier).

2.1. De la définition 1.1, résulte immédiatement l'inclusion

$$W^{m, L^p_\alpha(E)} \subset W^{(m)}(p, \alpha, W^{m, E}; p, \alpha, W^{0, E})$$

(la définition et les principales propriétés de ces espaces ont été rappelées au chapitre 0), et par conséquent pour $-\alpha - \frac{1}{p} < j < m - \alpha - \frac{1}{p}$, l'opérateur $u \mapsto u^{(j)}(0)$ est défini et linéaire continu de $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ dans

$$T^{(m)}_j(p, \alpha, W^{m, E}; p, \alpha, W^{0, E}) = B^{m-j-\alpha-\frac{1}{p}, E}_p.$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème que nous nous proposons de démontrer :

Théorème 2.1. — *L'application*

$$u \mapsto \{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\}$$

$\left(\text{où } k \text{ désigne le plus grand entier } < m - \alpha - \frac{1}{p}\right)$ *est linéaire continue de*

$$W^{m, L^p_\alpha(E)} \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B^{m-j-\alpha-\frac{1}{p}, E}_p$$

et admet un inverse à gauche linéaire continu (*nous appellerons un tel opérateur un relèvement de* $\prod_{j=1}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$ *dans* $W^{m,L_\alpha^p(E)}$),

pour $a+\frac{1}{p}>0$.

Les restrictions $\alpha+\frac{1}{p}>0$ et $j\leq k$, seront justifiées plus loin (point 2.6).

2.2. Dans une première étape nous étudions la fonction

$$u_{j,q}(t)=t^{-1-j-q}(-A+t^{-1})^{-1-2j-q}a \tag{2.1}$$

pour a fixé dans E.

Il est évident que $u_{j,q}(t)$ est indéfiniment dérivable dans $]0,+\infty[$, à valeurs dans E; nous allons calculer les dérivées de $u_{j,q}(t)$.

On vérifie aisément par récurrence sur l l'identité

$$u_{j,q}^{(l)}(t)=\sum_{\nu=0}^{l} C_{j,q;l,\nu}\,t^{-1-j-q-l-\nu}(-A+t^{-1})^{-1-2j-q-\nu}a, \tag{2.2}$$

où les nombres $C_{j,q;l,\nu}$ sont définis par les formules de récurrence suivantes :

$$C_{j,q;0,0}=1, \tag{2.3'}$$

$$\begin{cases} C_{j,q;l,0}=-(\ \ +q+l)\,C_{j,q;l-1,0}, \\ C_{j,q;l,\nu}=-(j+q+l+\nu)\,C_{j,q;l-1,\nu}+(2j+q+\nu)\,C_{j,q;l-1,\nu-1} \\ \qquad\qquad \text{pour}\quad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,l-1, \\ C_{j,q;l,l}=(2j+q+l)\,C_{j,q;l-1,l-1} \qquad \text{pour}\quad l\geq 1. \end{cases} \tag{2.3''}$$

En particulier pour $l=j$, utilisant l'identité

$$t^{-1}(-A+t^{-1})^{-1}=1+A(-A+t^{-1})^{-1},$$

on a l'expression suivante pour $u_{j,q}^{(j)}(t)$:

$$u_{j,q}^{(j)}(t)=\sum_{\nu=0}^{j} C_{j,q;j,\nu}\{1+A(-A+t^{-1})^{-1}\}^{1+2j+q+\nu}a.$$

En raisonnant de nouveau par récurrence sur l, on vérifie aisément l'identité

$$(2.5)\qquad u_{j,q}^{(j+l)}(t)=\sum_{\nu=0}^{j}K_{j,q;l,\nu}A^{l}t^{-1-2j-q-\nu-l}(-A+t^{-1})^{-1-2j-q-\nu-l}a$$

$$=\sum_{\nu=0}^{l}K_{j,q;l,\nu}A^{l}\{1+A(-A+t^{-1})^{-1}\}^{1+2j-q-\nu+l}a,$$

nous n'aurons pas à utiliser les formules de récurrence qui définissent les coefficients $K_{j,q;l,\nu}$.

2.3. Nous considérons toujours la fonction $u_{j,q}(t)$, en supposant de plus que a est tel que

$$A(-A+\lambda)^{-1}a\to 0,$$

lorsque $\lambda\to+\infty$; nous avons déjà vérifié (chap. I, n° 3, lemme 3.1) que tel est le cas lorsque $a\in B_q^{S,E}$ pour un $S>0$.

Alors de la majoration

$$\|A(-A+\lambda)^{-1}\|_{E\to E}\leq C_A+1$$

résulte que

$$A^{k}(-A+\lambda)^{-k}a\to 0,$$

lorsque $\lambda\to+\infty$, pour tout entier $k\geq 1$; et par conséquent de l'identité (2.4) on déduit

$$(2.6)\qquad u_{j,q}^{(j)}(0)=\left(\sum_{\nu=0}^{j}C_{j,q;j,\nu}\right)a.$$

Il nous faut calculer $\sum_{\nu=0}^{j}C_{j,q,j,\nu}$; pour cela nous posons

$$d_{j,q;l}=\sum_{\nu=0}^{l}C_{j,q;l,\nu}.$$

Alors d'après (2.3)′ on a $d_{j,q;0}=1$ et d'après (2.3)″ on a

$$d_{j,q;l}=(j-l+1)\,d_{j,q;l-1}$$

et par conséquent $d_{j,q;l} = \frac{j!}{(j-l)!}\,(l = 0, 1, \ldots, j)$, d'où

$$u_{j,q}^{(j)}(0) = (j!)\,a. \tag{2.7}$$

2.4. Nous déduirons le théorème 2.1 du

LEMME 2.1. — *L'application*

$$a \mapsto u_{j,q}(t) = t^{-1-j-q}(-A + t^{-1})^{-1-2j-q}a$$

est linéaire continue de

$$B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E} \quad \textit{dans} \quad W^{m,}L_\alpha^p(E)$$

et $u_{j,q}^{(j)}(0) = (j!)a$, *pour* $q \geqq \alpha + \frac{1}{p} - j$ $\left(\textit{et}\ q \geqq 0,\ j < m - \alpha - \frac{1}{p},\ \alpha + \frac{1}{p} > 0\right)$.

Démonstration. — Nous distinguerons deux cas selon que $\alpha + \frac{1}{p}$ est entier ou non :

1° *Cas où* $\alpha + \frac{1}{p}$ *n'est pas entier :* Il existe alors un entier $n \geqq 0$ tel que

$$n < m - j - \alpha - \frac{1}{p} < n + 1 \tag{2.8}$$

et par conséquent, d'après le corollaire 3.2, chap. I n° 3, a est élément de $(W^{n+1,E}, W^{n,E})_{\tau,p}$ où τ est tel que

$$m - j - \alpha - \frac{1}{p} = n + 1 - \tau. \tag{2.9}$$

et enfin d'après le théorème 3.1, n° 3, chap. I, a est tel que

$$t^{1-\tau}A(-A + t)^{-1}a \in L_*^p(W^{n,E});$$

par changement de variable, on voit immédiatement que

$$t^{-m+j+n}(-A + t^{-1})^{-1}a \in L_\alpha^p(W^{n+1,E}). \tag{2.10}$$

Pour vérifier le lemme 2.1, il faut prouver que $u_{j,q}^{(l)}(t) \in L_\alpha^p(W^{m-l,E})$ pour $l = 0, 1, \ldots, m$.

Nous distinguerons deux cas, selon que $m-l \geqq n+1$ et $m-l < n+1$.

Lorsque $m-l \geqq n+1$, nous utilisons la formule (2.2) : Il faut donc voir que

$$t^{-1-j-q-l-\nu}(-A+t^{-1})^{-1-2j-q-\nu}a \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \tag{2.11}$$

pour $\nu = 0, 1, \ldots, l$. Puisque $m-l \geqq n+1$, on déduit de (2.10) que

$$t^{-m+j+n}(-A+t^{-1})^{-m+l+n}a \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \tag{2.12}$$

en utilisant le fait que

$$\|(-A+t^{-1})^{-1}\|_{W^{\mu,E}\to W^{\mu+1,E}} \leqq (C_A+1) \tag{2.13}$$

pour tout entier μ. Enfin (2.11) résulte de (2.12) grâce à la majoration

$$\|t^{-1}(A+t^{-1})^{-1}\|_{W^{\mu,E}\to W^{\mu,E}} \leqq C_A, \tag{2.14}$$

pourvu que $1+2j+q+\nu \geqq m-l-n$, pour $\nu = 0, 1, \ldots l$, $l = 0, 1 \ldots, m-n-1$, i. e. pourvu que $q \geqq m-n-1-2j$.

Dans le cas où $m-l < n+1$, nous utiliserons la formule (2.5), car on a nécessairement $l \geqq j$ ([13]). D'après (2.5), (utilisée en remplaçant $l+j$ par l) il faut voir que

$$A^{l-j}t^{-1-j-q-\nu-l}(-A+t^{-1})^{-1-j-q-\nu-l}a \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \tag{2.15}$$

pour $\nu = 0, 1, \ldots, j$, $l = m-n, m-n+1, \ldots, m$. De (2.10) on déduit que

$$A^{n+1-m+l}t^{-m+j+n}(-A+t^{-1})^{-1}a \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \tag{2.16}$$

([13]) En effet on a $l > m-n-1$ et $m-n-1 \geqslant j$, car on a $m-j > m-j-\alpha-\frac{1}{p} > n$ $\left(\text{puisque } \alpha+\frac{1}{p}>0\right)$, d'où $m-j \geqq n+1$.

et (2.15) résulte de (2.16) comme précédemment grâce aux majorations (2.13) et (2.14). Nous avons démontré que $u_{j,q}(t) \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$; la continuité de $a \mapsto u_{j,q}(t)$ résulte aussi des raisonnements précédents; enfin l'identité $u^{(j)}_{q,j}(0) = (j!)a$ a déjà été prouvée au point 2.3.

2° *Cas où* $\alpha + \frac{1}{p}$ *est entier :* D'après le théorème de réitération dans les espaces de moyennes (*cf.* chap. 0), on a l'identité

$$B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E} = \left(B_p^{m-j-\alpha-\varepsilon-\frac{1}{p},E}, B_p^{m-j-\alpha+\varepsilon-\frac{1}{p},E}\right)_{\frac{1}{2},p} \qquad \text{pour} \quad 0<\varepsilon<1.$$

D'après la première partie de la démonstration on sait que $a \mapsto u_{j,q}(t)$ est linéaire continue de

$$B_p^{m-j-\alpha-\varepsilon-\frac{1}{p},E} \quad \text{dans} \quad W^{m,L^p_{\alpha+\varepsilon}(E)}$$

et de

$$B_p^{m-j-\alpha+\varepsilon-\frac{1}{p},E} \quad \text{dans} \quad W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)},$$

donc aussi de

$$B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E} \quad \text{dans} \quad \left(W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}, W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}\right)_{\frac{1}{2},p}$$

par interpolation. De l'identité

$$(L^p_{\alpha+\varepsilon}(E), L^p_{\alpha-\varepsilon}(E))_{\frac{1}{2},p} = L^p_\alpha(E)$$

résulte immédiatement l'inclusion

$$\left(W^{m,L^p_{\alpha+\varepsilon}(E)}, W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}\right)_{\frac{1}{2},p} \subset W^{m,L^p_\alpha(E)}$$

et par conséquent $a \mapsto u_{j,q}(t)$ est linéaire continu de

$$B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E} \quad \text{dans} \quad W^{m,L^p_\alpha(E)}.$$

Le lemme 2.1 est complètement démontré.

Remarque 2.1. — Pour $a \in B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},(E)}$ *on a* $u^{(l)}_{j,q}(0) = 0$ *pour* $l = 0, 1, \ldots, j-1$ (*sous les hypothèses du lemme* 2.1).

En effet, d'après (2.2), on a

$$t^{l-j}u^{(l)}_{j,q}(t) = \sum_{\nu=0}^{l} C_{j,q;l,\nu}\, t^{-1-2j-q-\nu}(-A+t^{-1})^{-1-2j-q-\nu}a$$
$$= \sum_{\nu=0}^{l} C_{j,q;l,\nu}\{1+A(-A+t^{-1})^{-1}\}^{1+2j+q+\nu}a$$

et par conséquent on a, comme au point 2.3,

$$\lim_{t\to 0} t^{l-j}u^{(l)}_{j,q}(t) = \sum_{\nu=0}^{l} C_{j,q;l,\nu}a,$$

d'où $u^{(l)}_{j,q}(0)=0$ $\left[u^{(l)}_{j,\nu}(0)\right.$ est bien défini puisque d'après le lemme 2.1, on a $\left.u_{j,q}(t)\in W^{m,L^p_\alpha(E)}\right]$.

2.5. *Démonstration du théorème* 2.1. — Pour montrer la surjectivité, fixons

$$\vec{a} = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \in \prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E};$$

il faut construire $u\in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ tel que

$$u^{(j)}(0) = a_j \qquad (j=0,1,\ldots,k). \tag{2.17}$$

Notons $\rho_{j,q}$ l'opérateur $a \mapsto \frac{1}{j!}u_{j,q}(t)$ défini au lemme 2.1, i. e.

$$(\rho_{j,q}.a)(t) = \frac{1}{j!}t^{-1-j-q}(-A+t^{-1})^{-1-2j-q}a.$$

Nous allons chercher u sous la forme

$$u = \sum_{j=0}^{k} \rho_{j,q}.b_j \tag{2.18}$$

avec $\vec{b}=\{b_0,b_1,\ldots,b_k\}\in\prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$, à déterminer $\left(q\geqq\alpha+\frac{1}{p}\right)$.

D'après le lemme 2.1, $u^{(j)}(0)$ est bien défini pour $j\leqq k$ et par

conséquent utilisant la remarque 2.1 et [(2.17), (2.18)] on trouve les relations

$$a_j = \sum_{l=0}^{j-1} (\rho_{l,q}.b_j)^{(j)}(0) + b_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, k). \tag{2.19}$$

Il est évident que ce système peut être résolu en $\vec{b}$ ([14]), et grâce au lemme 2.1 on voit que les relations (2.19) définissent une application

$$\vec{a} \mapsto \vec{b}$$

linéaire continue de $\prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$ dans lui-même; l'application $\vec{a} \mapsto u$ qu'on en déduit par (2.18) et que nous noterons $R_{k,q}$ est linéaire continue de

$$\prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E} \quad \text{dans} \quad W^{m,L_\alpha^p(E)},$$

et u est solution de (2.17).

Ceci prouve que l'application

$$u \mapsto \{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\}$$

de $W^{m,L_\alpha^p(E)}$ dans $\prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$ est surjective et admet un inverse à gauche linéaire continu.

C. Q. F. D.

Remarque 2.2. — Il résulte de la démonstration qu'on peut utiliser le même relèvement

$$\vec{a} \mapsto u$$

dans deux espaces $W^{m_i,L_{\alpha_i}^{p_i}(E)}$ $(i = 0, 1)$, tels que si k_i désigne le plus grand entier $< m_i - \alpha_i - \frac{1}{p_i}$ $(i = 0, 1)$, on ait $k_0 = k_1$

([14]) On trouve la solution sous la forme

$$b_0 = a_0,$$
$$b_1 = a_1 - (\rho_{0,q}.a_0)'(0), \qquad \ldots.$$

[il suffit de prendre $R_{k,q}$ avec $k = k_0 = k_1$ et $q \geqq \alpha_i + \frac{1}{p_i}$ $(i = 0, 1)$]. De plus, d'après le lemme 2.1 et les relations (2.19), $R_{k,q}$ est linéaire continu de

$$\prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E} \quad \text{dans} \quad W^{m,L^p_\alpha(E)}$$

pour tout m tel que $k < m - \alpha - \frac{1}{p}$ et $\alpha + \frac{1}{p} \leqq q$.

2.6. Il nous reste à justifier les restrictions sur $\alpha + \frac{1}{p}$ et sur j que nous avons imposées dans l'énoncé du théorème 2.1.

Commençons par la restriction sur $\alpha + \frac{1}{p}$:

La solution du problème des traces de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ est triviale pour $\alpha + \frac{1}{p} \leqq 0$, en vertu de la :

Proposition 2.1. — *Pour* $\alpha + \frac{1}{p} \leqq 0$ *les fonctions de* $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ *sont* $m-1$ *fois continûment dérivables dans* $[0, +\infty)$, *à valeurs dans* E *et pour* $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ *on a*

$$u^{(j)}(0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Démonstration. — Pour $T < +\infty$, nous notons u_T la restriction de u à $(0, T)$; il est évident que pour $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ on a

$$u_T^{(j)}(t) \in L^p(0, T; E) \qquad (j = 0, 1, \ldots, m),$$

l'application $u \mapsto u_T$ étant continue de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans l'espace des fonctions dont les dérivées d'ordre $\leqq m$ sont dans $L^p(0, T; E)$. Il est bien connu que les fonctions de ce dernier espace sont $m-1$ fois continûment dérivables sur $[0, T]$ à valeurs dans E (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle); par conséquent, u est $m-1$ fois continûment dérivable dans $[0, +\infty)$ à valeurs dans E et

$$u_T \to u^{(j)}(0)$$

est pour $j \leq m-1$, une application linéaire continue de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans E. Supposons

$$u^{(j)}(0) = a_j \neq 0,$$

alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\| u^{(j)}(t) \| \geq \frac{1}{2} \| a_j \| \qquad \text{pour} \quad 0 < t < \varepsilon.$$

et l'on a

$$+\infty > \int_0^{+\infty} \| t^\alpha u^{(j)}(t) \|^p \, dt \geq \left(\int_0^\varepsilon t^{\alpha p} \, dt \right) \left(\frac{1}{2} \| a_j \| \right)^p,$$

ce qui est impossible puisque $\alpha + \frac{1}{p} \leq 0$; on a donc $a_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$.

C. Q. F. D.

Pour justifier la restriction sur j nous utiliserons la proposition suivante que nous admettons provisoirement.

Proposition 2.2. — *Pour* $\alpha + \frac{1}{p} > 0$ *et lorsque* E *est réflexif, toute fonction* $v \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ *telle que*

$$v^{(j)}(0) = 0 \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k)$$

$\left(k \text{ plus grand entier} < m - \alpha - \frac{1}{p}\right)$ *et limite dans* $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ *d'une suite de fonctions nulles au voisinage de zéro.*

Alors supposons qu'il existe $J \geq m - \alpha - \frac{1}{p}$ et un espace de Banach X tel que

$$u \mapsto u^{(J)}(0)$$

soit linéaire continu de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans X; alors posons

$$u^{(j)}(0) = a_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, k)$$

et soit ρ un relèvement de l'application

$$u \mapsto \{ u(0), \ldots, u^{(k)}(0) \}$$

de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans $\prod_{j=0}^{k} B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$ (l'existence d'un tel relèvement est assurée par le théorème 2.1).

Pour $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ fixée, posons

$$v = u - \rho.\vec{a} \qquad (\text{avec } \vec{a} = \{a_0, \ldots, a_k\}),$$

on a alors $v \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ et $v^{(j)}(0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$; par conséquent, d'après la proposition 2.2 on a

$$v^{(j)}(0) = 0,$$

d'où $u^{(j)}(0) = \left(\rho.\vec{a}\right)^{(j)}(0)$; d'après cette dernière relation on voit que si $u^{(j)}(0)$ n'est pas identiquement nul pour $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$, la valeur de $u^{(j)}(0)$ ne dépend que de $\{a_0, \ldots, a_k\}$ i. e. de $\{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\}$, ce qui est absurde.

Démonstration de la proposition 2.2. — Par des raisonnements analogues à ceux de [4], on vérifie que sous les hypothèses de la proposition 2.2,

$$v \in W^{m,L^p_\alpha(E)} \cap W^{m-1,L^p_{\alpha-1}(1)} \cap \ldots \cap W^{0,L^p_\alpha(E)},$$

le résultat suit par tronquature.

3. Traces des espaces $W^{S,L^p_\alpha(E)}$ (S non entier).

3.1. D'après le théorème de densité ([19] et chap. 0, n° 1) pour $p < +\infty$ et $m < S < m+1$, $W^{m+1,L^p_\alpha(E)}$ est dense dans $W^{S,L^p_\alpha(E)}$; par conséquent, les applications

$$u \mapsto u^{(j)}(0) \qquad \left(j < m + 1 - \alpha - \frac{1}{p}\right)$$

sont définies dans un sous-espace dense de $W^{S,L^p_\alpha(E)}$, ceci nous permet d'énoncer le

Théorème 3.1. — *L'application*

$$u \mapsto \{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\}$$

(où k désigne le plus grand entier $< S - \alpha - \frac{1}{p}$*) se prolonge en une application linéaire continue de*

$$W^{S, L_p^\alpha(E)} \quad sur \quad \prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p}, E}$$

et admet un inverse à gauche linéaire continu, pour $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, $p < +\infty$.

La suite de ce numéro est consacrée entièrement à la démonstration de ce théorème, qui utilisera plusieurs lemmes.

Remarque 3.1. — Bien que $W^{S, L_\alpha^p(E)}$ soit défini par interpolation entre $W^{m+1, L_\alpha^p(E)}$ et $W^{m, L_\alpha^p(E)}$ pour $S \in]m, m+1[$, le théorème 3.1 ne se déduit pas du théorème 2.1 par interpolation car pour $S - m > \frac{1}{p}$, l'application $u \mapsto u^{(m)}(0)$ n'est pas définie (*voir* n° 2) pour $u \in W^{m, L_\alpha^p(E)}$ mais seulement pour $u \in W^{m+1, L_\alpha^p(E)}$; nous verrons cependant qu'elle se prolonge par continuité à $W^{S, L_\alpha^p(E)}$ (alors qu'elle ne se prolonge pas à $W^{m, L_\alpha^p(E)}$).

3.2. Nous donnons pour commencer quelques propriétés de la transformation

$$u(t) \mapsto v(t) = t^{-1}(-A + t^{-1})^{-1} u(t) \tag{3.1}$$

pour $u(t) \in W^{m, L_\alpha^p(E)}$; on peut encore écrire

$$v(t) = \{1 + A(-A + t^{-1})^{-1}\} u(t),$$

et l'on vérifie aisément par récurrence sur l l'identité

$$v^{(l)}(t) = \sum_{\nu=0}^{l} C_{l,\nu} t^{-1-l+\nu} A^{l-\nu} (-A + t^{-1})^{-1-l+\nu} u^{(\nu)}(t) \tag{3.2}$$

pour $l = 0, 1, \ldots, m$, les nombres $C_{l,\nu}$ étant définis par les formules de récurrence suivantes :

$$(3.3)' \qquad C_{0,0} = 1,$$

$$(3.3)'' \qquad \begin{cases} C_{l,0} = l C_{l-1,0}, \\ C_{l,\nu} = (l-\nu) C_{l-1,\nu} + C_{l-1,\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, l-1), \\ C_{l,l} = C_{l-1,l-1}, \end{cases}$$

en particulier on voit que $C_{l,l} = 1$ $(l = 0, 1, \ldots, m)$.

On a par hypothèse $u^{(j)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-j,E})$ pour $j = 0, 1, \ldots, m$, d'où

$$(3.4) \qquad A^{l-\nu} u^{(\nu)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-l,E})$$

pour $\nu = 0, 1, \ldots, l$; $l = 0, 1, \ldots, m$. De (3.4) on déduit, utilisant (2.14), les inclusions :

$$t^{-1-l+\nu} A^{l-\nu} (-A + t^{-1})^{-1-l+\nu} u^{(\nu)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-l,E})$$

pour $\nu = 0, 1, \ldots, l$, $l = 0, 1, \ldots, m$, d'où grâce à (3.2) :

$$(3.5) \qquad \varphi^{(l)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \qquad (l = 0, 1, \ldots, m).$$

On a donc $\varphi \in W^{m, L^p_\alpha(E)}$ et il est clair que l'opération $u \mapsto \varphi$ est linéaire continue de $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ dans lui-même pour tout m.

De (3.4) on déduit encore, en utilisant (2.13) et (2.14), les inclusions suivantes :

$$t^{-l-\nu} A^{l-\nu} (-A + t^{-1})^{-1-l+\nu} u^{(\nu)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m+1-l,E})$$

pour $\nu = 0, 1, \ldots, l$, $l = 0, 1, \ldots, m$, et par conséquent d'après (3.2) on a $t\varphi'(t) \in L^p_\alpha(W^{m+1-l,E})$ pour $l = 0, 1, \ldots, m$; de plus, il est clair que

$$u \mapsto t^{l} \varphi^{(l)}(t)$$

est linéaire continue de $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ dans $L^p_\alpha(W^{m+1-l,E})$ $(l = 0, 1, \ldots, m)$.

3.3. A présent nous démontrons le

LEMME 3.1. — *La transformation*

$$u(t) \mapsto \mathcal{C}_n u(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t s^{n-1} (-A + s^{-1})^{-1} u(s)\, ds$$

est linéaire continue de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ *dans* $W^{m,L^p_\alpha(E)} \cap W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(F)}$ *pour tout* $m \geq 0$ *et* $0 < \alpha + \frac{1}{p} < n$ *et*

$$(\mathfrak{C}_n u)^{(j)}(0) = \frac{1}{n+j+1} u^{(j)}(0) \qquad \text{pour} \quad u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}\left(m - \alpha - \frac{1}{p} > j\right)$$

telle que $u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(j-1)}(0) = 0$.

Démonstration. — Nous écrivons

$$w_n(t) = \mathfrak{C}_n u(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t s^n \varphi(s)\, ds, \tag{3.6}$$

$\varphi(t)$ étant définie par (3.1).

D'après le point 3.2, pour $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$, on a

$$\begin{cases} \varphi^{(l)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \\ \varphi^{(l)}(t) \in L^p_{\alpha+1}(W^{m+1-l,F}) \end{cases} \qquad (l = 0, 1, \ldots, m). \tag{3.7}$$

De (3.6) résultent les identités

$$w_n^{(l)}(t) = \frac{1}{t^{n+l+1}} \int_0^t s^{n+l} \varphi^{(l)}(s)\, ds \tag{3.8}$$

pour $l = 0, 1, \ldots, m$, et par conséquent d'après (3.7) et l'inégalité (9.9.10) de [7], on a

$$w_n^{(l)}(t) \in L^p_\alpha(W^{m-l,E}) \qquad (l = 0, 1, \ldots, m),$$

i.e. $w_n \in W^{m,L^p_\alpha(1)}$ et

$$w_n^{(l)}(t) \in L^p_{\alpha+1}(W^{m+1-l,1}) \qquad (l = 0, 1, \ldots, m).$$

Pour vérifier que $w_n \in W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}$, il reste à voir que

$$w_n^{(m+1)}(t) \in L^p_{\alpha+1}(E), \tag{3.9}$$

pour cela on dérive (3.8) :

$$w_n^{(m+1)}(t) = -\frac{n+m+1}{t^{n+m+2}} \int_0^t s^{n+m} \varphi^{(m)}(s)\, ds + \frac{1}{t} \varphi^{(m)}(t), \tag{3.10}$$

(3.9) résulte de (3.7), (3.10) et de l'inégalité (9.9.10) de [7].

Il est clair que les raisonnements précédents prouvent aussi la continuité de

$$\mathfrak{S}_n : \quad u(t) \mapsto w_n(t)$$

comme opérateur de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans $W^{m,L^p_\alpha(E)} \cap W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}$.

Pour terminer la démonstration du lemme considérons $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ telle que

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{j-1}(0) = 0.$$

D'après le théorème 2.1, $u^{(j)}(0)$ est défini comme élément de $B_p^{m-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$; d'après (3.2) nous avons

$$\varphi^{(j)}(0) = \sum_{\nu=0}^{j} C_{j,\nu} A^{j-\nu} u^{(\nu)}(0) = C_{j,j}\, u^{(j)}(0) = u^{(j)}(0),$$

puis d'après (3.8) nous avons

$$w_n^{(j)}(0) = \frac{1}{n+j+1}\, \varphi^{(j)}(0) = \frac{1}{n+j+1}\, u^{(j)}(0).$$

Le lemme est complètement démontré; nous en déduisons le

LEMME 3.1'. — *Il existe un opérateur $\mathfrak{S}_{n,q}$ linéaire continu de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans $W^{m,L^p_\alpha(E)} \cap W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}$ pour tout $m \geq 0$ et $0 < \alpha + \frac{1}{p} < n$, et tel que pour $0 < \alpha + \frac{1}{p} < n$, $q < m - \alpha - \frac{1}{p}$, $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ on ait*

$$(\mathfrak{S}_{n,q}\, u)^{(q)}(0) = u^{(q)}(0).$$

La démonstration utilise un procédé classique : Notons $\mathcal{R}_q$ l'opérateur

$$u(t) \mapsto \sum_{l=0}^{q} \lambda_l\, u(lt) \tag{3.11}$$

les nombres λ_l étant solutions du système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{q} l^k \lambda_l = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, q-1), \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{q} l^q \lambda_l = 1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Il est évident que $\mathcal{R}_q$ est linéaire continu de $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ dans lui-même pour tout m, tout α et tout p, et que pour $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$, $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, $q < m - \alpha - \frac{1}{p}$, on a

$$(3.13) \qquad \begin{cases} (\mathcal{R}_q u)^{(k)}(0) = 0 & (k = 0, 1, \ldots, q-1), \\ (\mathcal{R}_q u)^{(q)}(0) = u^{(q)}(0). \end{cases}$$

D'après le lemme 3.1 on peut poser

$$(3.14) \qquad \mathcal{S}_{n,q} = (n+q+1)\mathcal{E}_n \circ \mathcal{R}_q.$$

3.4. — Lemme 3.2. — *Pour* $0 < \varepsilon < \inf\left(\alpha + \frac{1}{p}, 1\right)$ *on a l'inclusion*

$$W^{m,L^p_\alpha(E)} \subset W^{m-\varepsilon,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)} \qquad (m \text{ entier} > 0).$$

Démonstration. — Pour $u \in W^{m,L^p_\alpha(E)}$ posons

$$F(t, x) = u(x+t) \qquad (t, x \geq 0).$$

Nous allons montrer que si l'on considère F comme fonction de t seulement on a

$$(3.15) \qquad F \in W^{(1)}\left(p, \beta, W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}; p, \beta, W^{m-1,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}\right),$$

avec $\beta + \frac{1}{p} = \varepsilon$ (la définition des espaces W a été rappelée au chap. 0); comme

$$u(x) = F(0, x)$$

on déduira de (3.15) que

$$u \in T^{(1)}_0\left(p, \beta, W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}\right); p, \beta. W^{m-1,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}\Big),$$

i. e.

$$u \in \left(W^{m,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}, W^{m-1,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}\right)_{\beta+\frac{1}{p},p} = W^{m-\varepsilon,L^p_{\alpha-\varepsilon}(E)}.$$

Pour démontrer (3.15), il suffit de vérifier que

$$(3.16) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\beta p} \int_0^{+\infty} \| x^{\alpha-\varepsilon} A^l u^{(m-l)}(x+t) \|^p \, dx \, dt < +\infty \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad l = 0, 1, \ldots, m, \end{cases}$$

mais (3.16) résulte des inégalités

$$\int_0^{+\infty} t^{\beta p} \int_0^{+\infty} x^{(\alpha-\varepsilon)p} \,\|\, \mathrm{A}^l u^{(m-l)}(x+t) \,\|^p \, dx\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\beta p} \int_t^{+\infty} (x-t)^{(\alpha-\varepsilon)p} \,\|\, \mathrm{A}^l u^{(m-l)}(x) \,\|^p \, dx\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \|\, \mathrm{A}^l u^{(m-l)}(x) \,\|^p \left(\int_0^x t^{\beta p} (x-t)^{(\alpha-\varepsilon)p} \, dt \right) dx$$

$$= \left(\int_0^1 t^{\beta p} (1-t)^{(\alpha-\varepsilon)p} \, dt \right) \left(\int_0^{+\infty} x^{\beta p + (\alpha-\varepsilon)p + 1} \,\|\, \mathrm{A}^{(l)} u^{(m-l)}(x) \,\|^p \right) dx < +\infty,$$

car on a $\beta p > -1$, $(\alpha-\varepsilon)p > -1$, $\beta p + (\alpha-\varepsilon)p + 1 = \alpha p$ et $\mathrm{A}^l u^{(m-l)}(x) \in \mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})$ pour $l = 0, 1, \ldots, m$.

Le lemme est démontré.

3.5. *Démonstration du théorème* 3.1. — Fixons s, p et α; pour s entier le théorème 3.1 n'est autre que le théorème 2.1, nous pouvons donc supposer s non entier; soit m entier tel que $m < s < m+1$.

On a par définition

$$\mathrm{W}^{\mathrm{S},\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})} = \left(\mathrm{W}^{m+1,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})}, \mathrm{W}^{m,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})} \right)_{1-\sigma,p} \qquad (\sigma = \mathrm{S} - m).$$

Dans une première étape nous montrons que

$$u \mapsto u^{(j)}(0)$$

$\left(\text{pour } j < s - \alpha - \frac{1}{p} \right)$ qui est défini pour $u \in \mathrm{W}^{m+1,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})}$, se prolonge en une application linéaire continue de

$$\mathrm{W}^{\mathrm{S},\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})} \quad \text{dans} \quad \mathrm{B}_p^{\mathrm{S}-j-\alpha-\frac{1}{p},\mathrm{E}}$$

(rappelons que $\mathrm{W}^{m+1,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})}$ est dense dans $\mathrm{W}^{\mathrm{S},\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})}$). En effet, d'après le lemme 3.1′ on peut écrire $u^{(j)}(0) = (\mathcal{S}_{n,j} u)^{(j)}(0)$, $\left(n > \alpha + \frac{1}{p} \right)$ pour $u \in \mathrm{W}^{m+1,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})}$; puis toujours d'après le lemme 3.1′, on sait que $\mathcal{S}_{n,j}$ est linéaire continu de

$$\mathrm{W}^{m+1,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})} \quad \text{dans} \quad \mathrm{W}^{m+1,\mathrm{L}^p_\alpha(\mathrm{E})}$$

et de

$$W^{m,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad W^{m+1,L^p_\alpha(E)},$$

donc aussi par interpolation, de

$$W^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad \left(W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}\right)_{1-\sigma,p};$$

comme on a

$$(L^p_\alpha(E), L^p_{\alpha+1}(E))_{1-\sigma,p} = L^p_{\alpha+1-\sigma}(E),$$

on vérifie facilement que

$$\left(W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}\right)_{1-\sigma,p} \subset W^{m+1,L^p_{\alpha+1-\sigma}(E)}$$

et par conséquent $\mathcal{S}_{n,j}$ est linéaire continu de

$$W^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad W^{m+1,L^p_{\alpha+1-\sigma}(E)}$$

et d'après le théorème 2.1, $u \mapsto (\mathcal{S}_{n,j}u)^{(j)}(0)$ est linéaire continu de

$$W^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},(E)}$$

Comme $(\mathcal{S}_{n,j}u)^{(j)}(0) = u^{(j)}(0)$ pour $u \in W^{m+1,L^p_\alpha(E)}$, on a bien démontré que $u \mapsto u^{(j)}(0)$ se prolonge en une application de

$$W^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},(E)} \qquad \text{pour} \quad j < S-\alpha-\frac{1}{p}.$$

Par conséquent $u \mapsto \{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\}$ se prolonge en une application linéaire continue de

$$W^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},E};$$

il reste à vérifier que cette application est surjective et admet un inverse à gauche linéaire continu; ceci est immédiat car on a déjà prouvé (*cf.* théorème 2.1) l'existence d'un opérateur linéaire continu ρ de

$$\prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},(E)} \text{ dans} \quad W^{m+1,L^p_{\alpha+1-\sigma}(E)}$$

tel que $(\rho\{a_0, \ldots, a_k\})^{(j)}(0) = a_j$, et d'après le lemme 3.2 on a

$$W^{m+1, L^p_{\alpha+1-\sigma}(E)} \subset W^{S, L^p_\alpha(E)}.$$

Le théorème est complètement démontré.

Remarque 3.1. — On pourrait justifier les restrictions $\alpha + \frac{1}{p} > 0$ et $j < S - \alpha - \frac{1}{p}$, par des raisonnements analogues à ceux développés au point 2.6, n° 2.

Remarque 3.2. — Il résulte de la remarque 2.1 du numéro 2 et du lemme 3.2 qu'on peut utiliser le même relèvement $R_{k,q}$ dans deux espaces $W^{S_i, L^{p_i}_{\alpha_i}(E)}$ tels que k soit le plus grand entier $< S_i - \alpha_i - \frac{1}{p_i}$ $(i = 0, 1)$ et que $\alpha_i + \frac{1}{p_i} < q - 1$ $(i = 0, 1)$. De plus $R_{k,q}$ est linéaire continu de

$$\prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p}, (E)} \text{ dans } W^{S, L^p_\alpha(E)}$$

pour tout S tel que $k < S - \alpha - \frac{1}{p}$, et $\alpha + \frac{1}{p} < q - 1$.

4. Traces des espaces $H^{S, L^p_\alpha(E)}$, définis par interpolation complexe.

4.1. Les espaces $W^{S, L^p_\alpha(E)}$ ont été définis à partir des espaces $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ par interpolation réelle; utilisant l'interpolation complexe on peut poser la

Définition 4.1. — *Pour* S *réel* $\in]m, m+1[$ *on pose*

$$H^{S, L^p_\alpha(E)} = [W^{m+1, L^p_\alpha(E)}, W^{m, L^p_\alpha(E)}]_\theta,$$

avec θ *tel que* $S = m + 1 - \theta$.

Nous allons étudier les traces des fonctions des espaces $H^{S, L^p_\alpha(E)}$. Il résulte de la définition que pour $m < S < m+1$, $W^{m+1, L^p_\alpha(E)}$ est dense dans $H^{S, L^p_\alpha(E)}$ et par conséquent les applications

$$u \mapsto u^{(j)}(0)$$

pour $j < m + 1 - \alpha - \frac{1}{p}$, sont définies dans un sous-espace dense de $H^{S,L^p_\alpha(E)}$. Nous démontrerons le

THÉORÈME 4.1. — *L'application*

$$u \mapsto \{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\},$$

$\left(\text{où } k \text{ désigne le plus grand entier } < S - \alpha - \frac{1}{p}\right)$ *se prolonge en une application linéaire continue de*

$$H^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},E}$$

et admet un inverse à gauche linéaire continu, pour $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, $p < +\infty$.

La suite de ce numéro est consacrée entièrement à la démonstration de ce théorème, qui utilise le lemme 3.1′ et un nouveau lemme analogue au lemme 3.2 :

LEMME 4.1. — *Pour* m *entier* ≥ 0, $0 < \sigma < 1$, $S = m + \sigma$, $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, *on a l'inclusion*

$$W^{m+2,L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)} \subset H^{S,L^p_\alpha(E)}$$

4.2. Nous admettons provisoirement le lemme 4.1 et démontrons le théorème 4.1; la démonstration suit les mêmes idées que la démonstration du théorème 3.1 :

Fixons S, p et α et soit m entier tel que $m < S < m + 1$. On a par définition

$$H^{S,L^p_\alpha(E)} = \left[W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m,L^p_\alpha(E)}\right]_{1-\sigma} \qquad (\sigma = S - m).$$

L'opérateur $u \mapsto u^{(j)}(0)$, pour $u \in W^{m+1,L^p_\alpha(E)}$ et $j < S - \alpha - \frac{1}{p}$, peut encore s'écrire d'après le lemme 3.1′ :

$$u \mapsto (\mathcal{S}_{n,j} u)^{(j)}(0) \qquad \left(n > \alpha + \frac{1}{p}\right);$$

toujours d'après le lemme 3.1′, on sait que $\mathcal{S}_{n,j}$ est linéaire continu de

$$W^{m+1,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad W^{m+1,L^p_\alpha(E)}$$

et de

$$W^{m,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}$$

donc aussi par interpolation, de

$$H^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad \left[W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}\right]_{1-\sigma};$$

comme on a

$$[L^p_\alpha(E), L^p_{\alpha+1}(E)]_{1-\sigma} = L^p_{\alpha+1-\sigma}(E),$$

on vérifie facilement que

$$\left[W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m+1,L^p_{\alpha+1}(E)}\right]_{1-\sigma} \subset W^{m+1,L^p_{\alpha+1-\sigma}(E)}$$

et par conséquent $\mathcal{S}_{n,j}$ est linéaire continu de

$$H^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad W^{m+1,L^p_{\alpha+1-\sigma}(E)}$$

et d'après le théorème 2.1, $u \mapsto (\mathcal{S}_{n,j}u)^{(j)}(0)$ est linéaire continu de

$$H^{S,L^p_\alpha(E)} \quad \text{dans} \quad B^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},E}_p;$$

ceci montre que $u \mapsto u^{(j)}(0)$ se prolonge de $W^{m+1,L^p_\alpha(E)}$ à $H^{S,L^p_\alpha(E)}$ en une application linéaire continue de $H^{S,L^p_\alpha(E)}$ dans $B^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},E}_p$.

Il reste à prouver que

$$u \mapsto \{u(0), u'(0), \ldots, u^{(k)}(0)\}$$

est surjective de $H^{S,L^p_\alpha(E)}$ sur $\prod_{j=0}^{k} B^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},E}_p$ et admet un inverse à gauche; ceci est immédiat car d'après le théorème 2.1 il existe un opérateur φ linéaire continu de

$$\prod_{j=0}^{k} B^{S-j-\alpha-\frac{1}{p},E}_p \quad \text{dans} \quad W^{m+2,L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)}$$

tel que $(\varphi\{a_0, \ldots, a_k\})^{(j)}(0) = a_j$, et d'après le lemme 4.1 on a

$$W^{m+2,L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)} \subset H^{S,L^p_\alpha(E)}$$

(remarquer que $\alpha + 2 - \sigma \geqq 0$).

Le théorème 4.1 est démontré sous réserve de vérifier le lemme 4.1.

4.3. La démonstration du lemme 4.1 est assez technique : il résultera de plusieurs autres lemmes.

Tout d'abord démontrons le

LEMME 4.2. — *Pour m entier >0, $\alpha \geqq 0$, $W^{m,L^p_\alpha(E)}$ est de classe* $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}(W^{m+1,L^p_\alpha(E)}, W^{m-1,L^p_\alpha(E)})$.

Ce lemme est un cas particulier d'un résultat plus général : Soit X un espace de Banach complexe et A_i un opérateur linéaire non borné, fermé de domaine D_{A_i} dans X, et qui vérifie l'hypothèse (H) du chapitre I, n° 3, i. e.,

$$(H) \qquad (-A_i+\lambda)^{-1} \quad \text{existe pour} \quad \lambda \geqq 0$$

et

$$\| (-A_i+\lambda)^{-1} \|_{X \to X} \leqq \frac{C_{A_i}}{\lambda+1} \qquad \text{pour} \quad i=0,1.$$

Enfin faisons l'hypothèse suivante de commutativité : $(-A_0+\lambda)^{-1}$ commute à $(-A_1+\lambda)^{-1}$ pour $\lambda \geqq 0$.

Posons

$$W^{0,X} = X,$$
$$W^{1,X} = D_{A_0} \cap {}_{A_1}D_{A_0} \cap D_{A_1},$$
$$W^{2,X} = D_{A_0^2} \cap D_{A_0 A_1} \cap D_{A_1 A_0} \cap D_{A_1^2},$$

alors nous avons le

LEMME 4.2′. — $W^{1,X}$ *est de classe* $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}(W^{2,X}, W^{0,X})$.

Évidemment le lemme 4.2 est un cas particulier du lemme 4.2′ si l'on prend pour X l'espace $W^{m-1,L^p_\alpha(E)}$ pour A_0 l'opérateur

$$u(t) \mapsto u'(t)$$

et pour A_1 l'opérateur

$$u(t) \mapsto A\,u(t).$$

Démonstration du lemme 4.2′. — Nous devons vérifier la double inclusion

$$(W^{2,X}, W^{0,X})_{\frac{1}{2},1} \subset W^{1,X} \subset (W^{2,X}, W^{0,X})_{\frac{1}{2},\infty} \tag{4.1}$$

On a évidemment $W^{2,X} \subset D_{A_i^2}$, d'où

$$(W^{2,X}, W^{0,X})_{\frac{1}{2},1} \subset (D_{A_i^2}, X)_{\frac{1}{2},1}$$

et nous avons déjà vu au corollaire 3.1, n° 3, chap. II que $D_{A_i} \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(D_{A_i^2}, X)$, d'où en particulier

$$(D_{A_i^2}, X)_{\frac{1}{2},1} \subset D_{A_i} \qquad (i = 0, 1),$$

et par conséquent

$$(W^{2,X}, W^{0,X})_{\frac{1}{2},1} \subset D_{A_0} \cap D_{A_1} = W^{1,X};$$

ceci prouve la première inclusion dans (4.1). Pour vérifier la seconde inclusion, nous fixons

$$a \in W^{1,X} = D_{A_0} \cap D_{A_1},$$

et nous construisons une fonction u telle que

$$\begin{cases} t\,u(t) \in L^\infty_+(W^{2,X}), \\ t\,u''(t) \in L^\infty_+(W^{0,X}), \\ u(0) = a, \end{cases} \tag{4.2}$$

ce qui prouve que

$$a \in T_0^{(2)}(\infty, 1, W^{2,X}; \infty, 1, W^{0,X}) = (W^{2,X}, W^{0,X})_{\frac{1}{2},\infty}$$

i. e., $W^{1,X} \subset (W^{2,X}, W^{0,X})_{\frac{1}{2},\infty}$. Il suffit de prendre comme fonction $u(t)$ la fonction

$$u(t) = t^{-4}(-A_0 + t^{-1})^{-2}(-A_1 + t^{-1})^{-2}a,$$

on a alors

$$\begin{aligned} u''(t) = {} & 6t^{-6}A_0^2(-A_0 + t^{-1})^{-4}(-A_1 + t^{-1})^{-2}a \\ & + 8A_0A_1t^{-6}(-A_0 + t^{-1})^{-3}(-A_1 + t^{-1})^{-3}a \\ & + 6t^{-6}A_1^2(-A_0 + t^{-1})^{-2}(-A_1 + t^{-1})^{-4}a, \end{aligned}$$

d'où (4.2).

4.4. La démonstration du lemme 4.1 utilisera également le

LEMME 4.3. — *Pour* $\alpha + \frac{1}{p} > 1$, *on a l'inclusion*

$$W^{m+1, L^p_\alpha(E)} \subset W^{m, L^p_{\alpha-1}(E)}.$$

Démonstration.

Cas $m = 0$: Il est facile de voir par tronquature, que les fonctions u de $W^{1, L^p_\alpha(I)}$, nulles pour t assez grand forment un sous-espace dense de $W^{1, L^p_\alpha(E)}$; mais pour une telle fonction on peut écrire

$$u(t) = -\int_t^{+\infty} u'(s)\, ds,$$

et par conséquent si $\alpha + \frac{1}{p} > 1$, l'inégalité (9.9.10) de [7] s'écrit ici

$$\| u \|_{L^p_{\alpha-1}(E)} \leq \frac{1}{\alpha + \frac{1}{p} - 1} \| u' \|_{L^p_\alpha(E)} \tag{4.3}$$

L'inégalité (4.3) reste vraie, par prolongement par continuité pour toute $u \in W^{1, L^p_\alpha(E)}$, ce qui prouve l'inclusion $W^{1, L^p_\alpha(E)} \subset L^p_{\alpha-1}(E)$.

Cas $m > 0$: Pour $u \subset W^{m+1, L^p_\alpha(E)}$ on a évidemment $A^k u^{(l)}(t) \in W^{1, L^p_\alpha(E)}$ pour $k + l \leq m$; d'après la première partie de la démonstration on a donc $A^k u^{(l)}(t) \in L^p_{\alpha-1}(E)$ pour $k + l \leq m$, i.e. $u \in W^{m, L^p_{\alpha-1}(E)}$.

C.Q.F.D.

Du lemme 4.3, nous allons déduire le

LEMME 4.4. — *Pour* $\alpha + \frac{1}{p} > 1$, *et* $0 < \sigma < 1$, *on a l'inclusion*

$$W^{m+\sigma, L^p_\alpha(E)} \subset W^{m, L^p_{\alpha-\sigma}(E)}$$

Démonstration :

Cas $m = 0$: On écrit

$$W^{\sigma, L^p_\alpha(E)} = \left(W^{1, L^p_\alpha(E)}, W^{0, L^p_\alpha(E)} \right)_{1-\sigma, p}$$

et utilisant le lemme 4.3 on obtient $\left(\text{car } \alpha + \frac{1}{p} > 1 \right)$,

$$W^{\sigma, L^p_\alpha(E)} \subset \left(L^p_{\alpha-1}(E), L^p_\alpha(E) \right)_{1-\sigma, p} = L^p_{\alpha-\sigma}(E).$$

Cas $m > 0$: Pour $u \in W^{m+\sigma, L^p_\alpha(E)}$ on a

$$A^k u^{(l)}(t) \in W^{\sigma, L^p_\alpha(E)} \qquad \text{pour} \quad k + l \leq m,$$

d'où $A^k u^{(l)}(t) \in L^p_{\alpha-\sigma}(E)$ pour $k + l \leq m$, d'après la première partie de la démonstration; on a donc $u \in W^{m, L^p_{\alpha-\sigma}(E)}$.

C.Q.F.D.

4.5. Nous pouvons à présent démontrer le lemme 4.1.

Fixons m, p, α, σ et ε tel que $0 < \varepsilon < 1 - \sigma$; d'après le lemme 3.2, on a

$$W^{m+2, L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)} \subset W^{m+2-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)}. \tag{4.4}$$

Ensuite, d'après le lemme 4.2, $(\alpha + 2 - \sigma - \varepsilon \geq 0)$ et le théorème de réitération on peut écrire

$$W^{m+2-\sigma-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)} = \left(W^{m+3, L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)}, W^{m+1, L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)}\right)_{\theta', p}, \tag{4.5}$$

avec θ' tel que $1 - \sigma - \varepsilon = 2(1 - \theta')$ et

$$W^{m+3-\sigma-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)} = \left(W^{m+3, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)}, W^{m+1, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)}\right)_{\theta'', p}, \tag{4.6}$$

avec θ'' tel que $2 - \sigma - \varepsilon = 2(1 - \theta'')$. De (4.5), (4.6) et [16], résulte l'identité

$$W^{m+2-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)} = \left[W^{m+3-\sigma-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)}, W^{m+2-\sigma-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-}(E)}\right]_\theta, \tag{4.7}$$

avec θ tel que $1 - \varepsilon = (2 - \sigma - \varepsilon)(1 - \theta) + (1 - \sigma - \varepsilon)\theta$, i. e. $\theta = 1 - \sigma$.

D'après le lemme 4.4 $\left(\alpha + 2 - \sigma - \varepsilon + \frac{1}{p} > 1\right)$ on a

$$W^{m+3-\sigma-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)} \subset W^{m+2, L^p_{\alpha+1}(E)} \tag{4.8}$$

et

$$W^{m+2-\sigma-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)} \subset W^{m+1, L^p_{\alpha+1}(E)}. \tag{4.9}$$

Ensuite, d'après le lemme 4.3 $\left(\alpha + 1 + \frac{1}{p} > 1\right)$ on a

$$W^{m+2, L^p_{\alpha+1}(E)} \subset W^{m+1, L^p_\alpha(E)}, \tag{4.10}$$

$$W^{m+1, L^p_{\alpha+1}(E)} \subset W^{m, L^p_\alpha(E)}. \tag{4.11}$$

Combinant (4.7) à (4.11), on obtient

$$(4.12)\qquad W^{m+2-\varepsilon, L^p_{\alpha+2-\sigma-\varepsilon}(E)} \subset \left[W^{m+1, L^p_\alpha(E)}, W^{m, L^p_\alpha(E)}\right]_\theta = H^{m+\sigma, L^p_\alpha(E}$$

De (4.4) et (4.12) résulte l'inclusion

$$W^{m+2, L^p_{\alpha+2-\sigma}(E)} \subset H^{m+\sigma, L^p_\alpha(E)}$$

et le lemme 4.1 est démontré.

5. Applications aux espaces de Sobolev.

5.1. *Espaces de Sobolev en deux variables.* — On prend pour E l'espace $L^p(\mathbf{R})$ et pour A l'opérateur $\frac{d}{dx} - 1$ avec domaine $D_A = W^{1,p}(\mathbf{R})$, $W^{m, L^p_\alpha(E)}$ est alors l'espace que nous noterons $W^{m,p}_\alpha(\mathbf{R}^2_+)$ des fonctions u définies dans $\mathbf{R}^2_+$ et telles que $D^\gamma u \in L^p_\alpha(\mathbf{R}^2_+)$ pour $|\gamma| \leq m$, $L^p_\alpha(\mathbf{R}^2_+)$ désignant l'espace des classes de fonctions v telles que $x_2^\alpha v(x_1, x_2) \in L^p(\mathbf{R}^2_+)$. $W^{m,p}_\alpha(\mathbf{R}^2_+)$ est un espace de Sobolev avec poids.

$B^{S,E}_q$ est l'espace $B^{S,p}_q(\mathbf{R})$ de Besov (*cf.* chap. 0).

Nous noterons $W^{S,p}_\alpha(\mathbf{R}^2_+)$ l'espace $W^{S, L^p_\alpha(E)}$ et $H^{S,p}_\alpha(\mathbf{R}^2_+)$ l'espace $H^{S, L^p_\alpha(E)}$; lorsque $\alpha = 0$ ce sont les espaces usuels $W^{S,p}(\mathbf{R}^2_+)$ (*cf.* [23], [35]) et $H^{S,p}(\mathbf{R}^2_+)$ (*cf.* [32]).

Les théorèmes 2.1, 3.1 et 4.1 donnent les résultats de traces suivants :

$$u(x_1, x_2) \mapsto \left\{ u(x_1, 0), \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_2}(x_1, 0) \right\}$$

est une application linéaire continue avec inverse à gauche linéaire continu de

$$W^{S,p}_\alpha(\mathbf{R}^2_+) \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p}, p}(\mathbf{R})$$

$\left(\text{pour S réel} > \frac{1}{p},\ \alpha + \frac{1}{p} > 0,\ k \text{ étant le plus grand entier} < S - \alpha - \frac{1}{p}\right)$
et de

$$H^{S,p}_\alpha(\mathbf{R}^2_+) \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\alpha-\frac{1}{p}, p}(\mathbf{R})$$

(pour S non entier $> \frac{1}{p}$, $\alpha + \frac{1}{p} > 0$, k étant le plus grand entier $< S - \alpha - \frac{1}{p}$). Dans le cas $\alpha = 0$ ces résultats avaient été démontrés dans [35] et [32].

5.2. *Espaces de Sobolev en n variables.* — On prend pour E l'espace $L^p(\mathbf{R}^{n-1})$ $1 < p < \infty$ et pour A l'opérateur $(1 - \Delta)^{\frac{1}{2}}$ (défini par transformation de Fourier comme $\overline{\mathcal{F}}(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}$), avec domaine $D_A = W^{1,p}(\mathbf{R}^{n-1})$ (on vérifie l'hypothèse (H) sur l'opérateur A à l'aide du théorème de Mihlin [22]).

Plaçons-nous dans le cas où $\alpha = 0$; on a alors

$$W^{m, L^p_\alpha(E)} = W^{m,p}(\mathbf{R}^n_+) \qquad (m \text{ entier}),$$
$$W^{S, L^p_\alpha(E)} = W^{S,p}(\mathbf{R}^n_+) = B^{S,p}_p(\mathbf{R}^n_+) \qquad (S \text{ non entier}),$$
$$H^{S, L^p_\alpha(E)} = H^{S,p}(\mathbf{R}^n_+) \qquad (S \text{ non entier})$$

et

$$B^{S,E}_q = B^{S,p}_q(\mathbf{R}^{n-1}) \,.\, (W^{S,p}(\mathbf{R}^{n-1}) \text{ si S est non entier et } q = p).$$

On a les résultats de traces suivants :

$$\gamma_j : \quad u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto \left\{ u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \right\}$$

est une application linéaire continue (avec inverse à gauche continu) de

$$(5.1) \qquad W^{m,p}(\mathbf{R}^n_+) \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{m-1} W_p^{m-j-\frac{1}{p}, p}(\mathbf{R}^{n-1})$$

de

$$(5.2) \qquad W^{S,p}(\mathbf{R}^n_+) \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B^{S-j-\frac{1}{p}, p}(\mathbf{R}^{n-1})$$

et de

$$(5.3) \qquad H^{S,p}(\mathbf{R}^n_+) \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B_p^{S-j-\frac{1}{p}, p}(\mathbf{R}^{n-1})$$

pour S non entier (k désignant le plus grand entier $< S - \frac{1}{p}$).

De plus, d'après la remarque 3.2, on peut trouver un relèvement R_k qui soit linéaire continu de $\prod_{j=0}^{k} B_p^{s-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1})$ dans $W^{s,p}(\mathbf{R}^n_+)$ pour tout $s > k + \frac{1}{p}$.

Ceci nous permet de démontrer que $\overset{\rightarrow}{\gamma}_k$ est linéaire continu de

$$B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n_+) \quad \text{sur} \quad \prod_{j=0}^{k} B_q^{s-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}) \tag{5.4}$$

et admet un inverse à gauche continu $\left(k \text{ plus grand entier} < s - \frac{1}{p}\right)$.
En effet d'après le théorème de réitération on peut écrire

$$B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n_+) = (W^{s+\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n_+), W^{s-\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n_+))_{\frac{1}{2},q}$$

et si l'on prend $\varepsilon < s - k - \frac{1}{p}$, on voit d'après (5.2) que $\overset{\rightarrow}{\gamma}_k$ est linéaire continu de $B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n_+)$ dans

$$\prod_{j=0}^{k} \left(B_p^{s+\varepsilon-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}), B_p^{s-\varepsilon-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1})\right)_{\frac{1}{2},q} = \prod_{j=0}^{k} B_q^{s-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}),$$

d'après le théorème de réitération. Réciproquement R_k est linéaire continu de

$$\prod_{j=0}^{k} B_q^{s-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}) \quad \text{dans} \quad (W^{s+\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n_+), W^{s-\varepsilon,p}(\mathbf{R}^n_+))_{\frac{1}{2},q} = B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n_+)$$

et l'on a

$$\overset{\rightarrow}{\gamma}_k . R_k = 1 \qquad \text{dans} \quad \prod_{j=0}^{k} B_p^{s-\varepsilon-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}),$$

donc *a fortiori* dans

$$\prod_{j=0}^{k} B_q^{s-j-\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^{n-1}).$$

5.3. En tenant compte du fait que

$$W^{s,p}(\mathbf{R}^n_+) \quad [\text{resp. } B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n_+), H^{s,p}(\mathbf{R}^n_+)]$$

est l'espace des restrictions à $\mathbf{R}^n_-$ des fonctions de

$$W^{S,p}(\mathbf{R}^n) \quad [\text{resp. } B^{S,p}_q(\mathbf{R}^n),\ H^{S,p}(\mathbf{R}^n)]$$

et en itérant l'application de (5.2), (5.3) et (5.4) nous obtenons les énoncés suivants :

THÉORÈME 5.1. — *L'application*

$$u \mapsto \frac{\partial^j u}{\partial x_{m+1}^{j_{m+1}} \dots \partial x_n^{j_n}} \qquad (x_1, \dots, x_m; 0, \dots, 0)\ (j = j_{m+1} + \dots j_n)$$

est linéaire continue surjective de

$$W^{S,p}(\mathbf{R}^n) \quad \textit{sur} \quad B^{S-j-\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^m)$$

de

$$H^{S,p}(\mathbf{R}^n) \quad \textit{sur} \quad B^{S-j-\frac{n-m}{p},p}(\mathbf{R}^m) \qquad (S \text{ non entier})$$

et de

$$B^{S,p}_q(\mathbf{R}^n) \quad \textit{sur} \quad B^{S-j-\frac{n-m}{p},p}(\mathbf{R}^m)$$

pour $j < S - \frac{n}{p} + \frac{m}{p}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq +\infty$.

On retrouve en particulier les résultats de traces de ([23], [32], [35]).

Remarque 5.1. — Par cartes locales, on déduit des résultats analogues à (5.1)-(5.4) pour les traces des espaces de Sobolev de fonctions définies dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, à frontière assez régulière.

6. *Un complément.*

6.1. Il aurait été possible d'étudier dans le cas général (i. e. abstrait) considéré dans les numéros 2-4, les traces d'espaces $B^{S,L^p_\alpha(E)}_q$ analogues aux espaces $B^{S,p}_q(\mathbf{R}^n_-)$; nous avons vu que pour ces derniers espaces les résultats de traces (5.4) se déduisent facilement des résultats de traces pour les espaces $B^{S,p}_p(\mathbf{R}^n_-)$.

Par ailleurs il est facile de voir que $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n_-)$ est dense dans $B^{S,p}_q(\mathbf{R}^n_-)$ pour $S \leq \frac{1}{p}$, $1 \leq q \leq +\infty$ sauf pour $S = \frac{1}{p}$, $q = 1$; ces espaces

n'ont donc pas de traces sauf peut-être dans le cas limite $S = \frac{1}{p}$, $q = 1$. C'est ce cas limite que nous allons étudier dans ce numéro, dans le cas abstrait, en nous bornant au cas $\alpha = 0$, pour simplifier.

6.2. Plus précisément nous posons la :

Définition 6.1 :

$$B_1^{\frac{1}{p},\,L_0^p(E)} = \left(W^{1,L_0^p(E)},\, W^{0,L_0^p(E)}\right)_{1-\frac{1}{p},\,1} \qquad \textit{pour} \quad 1 < p < +\infty.$$

De cette définition résulte que $W^{1,L_0^p(E)}$ est dense dans $B_1^{\frac{1}{p},L_0^p(E)}$ et par conséquent l'opération

$$u \mapsto u(0)$$

est définie dans un sous-espace de $B_1^{\frac{1}{p},L_0^p(E)}$. Nous allons démontrer la

Proposition 6.1. — *L'opérateur* $u \mapsto u(0)$ *se prolonge en un opérateur linéaire continu de* $B_1^{\frac{1}{p},L_0^p(E)}$ *dans* E.

Nous ignorons si cet opérateur est surjectif.

Démonstration. — Pour $u \in W^{1,L_0^p(E)}$, on peut écrire, suivant [9], l'identité

$$u(0) = \frac{1}{h}\int_0^h u(t)\,dt - \int_0^h \frac{dt}{t^2}\int_0^t [u(t) - u(S)]\,dS \tag{6.1}$$

pour tout $h > 0$. De (6.1) résulte l'identité

$$u(0) = -\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\int_0^t [u(t) - u(s)]\,ds,$$

car d'après l'inégalité

$$\left\| \frac{1}{h}\int_0^h u(t)\,dt \right\| \leq h^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^h \|u(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

le terme $\frac{1}{h}\int_0^h u(t)\,dt$ converge vers zéro dans E lorsque $h \to +\infty$, et la seconde intégrale dans le membre de droite de l'identité (6.1) converge vers

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2}\int_0^t [\,u(t)-u(s)\,]\,ds.$$

car cette dernière intégrale converge avec

$$\int_0^{+\infty} dh \int_0^{+\infty} \frac{[\,u(s+h)-u(s)\,]}{(s+h)^2}\,ds;$$

pour vérifier ce dernier point on écrit

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} dh \int_0^{+\infty} \frac{\|\,u(s+h)-u(s)\,\|}{(s+h)^2}\,ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \|\,u(s+h)-u(s)\,\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{ds}{(s+h)^{2p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} dh \\
&= C\int_0^{+\infty} h^{-\frac{1}{p}-1} \left(\int_0^{+\infty} \|\,u(s+h)-u(s)\,\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} dh.
\end{aligned}$$

D'après [19] cette dernière intégrale est majorée par $\|u\|_{\mathrm{B}_1^{\frac{1}{p}},\,\mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})}$. On a donc vérifié (6.1)′ et établi l'inégalité

$$\|\,u(0)\,\| \leq C\,\|u\|_{\mathrm{B}_1^{\frac{1}{p}},\mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})} \tag{6.2}$$

pour $u \in \mathrm{W}^{1,\mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})}$; par continuité cette inégalité est vraie pour toute $u \in \mathrm{B}_1^{\frac{1}{p}, \mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})}$, ce qui démontre la proposition.

6.3. Pour $u \in \mathrm{B}_1^{\frac{1}{p}, \mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})}$, la fonction

$$t \mapsto u(t_0+t)$$

est encore élément de $\mathrm{B}_1^{\frac{1}{p}, \mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})}$ pour tout $t_0 > 0$; appliquant (6.2) à cette fonction et faisant varier t_0 on obtient

$$\max_{t_0>0} \|\,u(t_0)\,\| \leq C\,\|u\|_{\mathrm{B}_1^{\frac{1}{p}},\,\mathrm{L}_0^p(\mathrm{E})} \tag{6.3}$$

pour toute $u \in W^{1,L_0^p(E)}$ (les fonctions de cet espace sont après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, continues à valeurs dans E). Comme $W^{1,L_0^p(E)}$ est dense dans $B_1^{\frac{1}{p},L_0^p(E)}$ on a le

Corollaire 6.1. — *Les fonctions de* $B_1^{\frac{1}{p},L_0^p(E)}$, *sont continues et bornées dans* $[0, \infty)$ *à valeurs dans* E (*après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle*).

6.4. En particulier, il résulte de ce corollaire « l'immersion »

$$B^{\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R}) \cap C^0(\mathbf{R}).$$

Utilisant le théorème 5.1 on en déduit le

Théorème 6.1. — *On a l'immersion* (*pour* $1 < p < \infty$)

$$B_1^{\frac{1}{p},p}(\mathbf{R}^n) \subset L^\infty(\mathbf{R}^n) \cap C^0(\mathbf{R}^n).$$

Du théorème 6.1 on déduit le corollaire 6.2 à l'aide des identités suivantes qui résultent du théorème de réitération :

$$B^{s,p}(\mathbf{R}^n) = \begin{cases} \left(B_1^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n), L^p(\mathbf{R}^n)\right)_{\frac{s}{n},p} & \text{pour } s < \frac{n}{p}, \\ \left(B_1^{k+1+\frac{n}{p}}(\mathbf{R}^n), B^{k+\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)\right)_{\dots} & \\ \text{pour } k < s - \frac{n}{p} < k+1 \ (k = 0, 1, \dots). \end{cases}$$

Corollaire 6.2. — On a les immersions

$B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n) \subset C^{s-\frac{n}{p}}(\mathbf{R}^n)$ *pour* $s > \frac{n}{p}$ ($s - \frac{n}{p}$ *non entier*),

$B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n) \subset M^{1-\frac{1}{p}+\frac{s}{n}}(\mathbf{R}^n)$ *pour* $s < \frac{n}{p}$ $(1 \leq q \leq +\infty)$,

$B_q^{s,p}(\mathbf{R}^n) \subset L^r(\mathbf{R}^n)$ *pour* $s < \frac{n}{p}$ $(1 \leq q \leq r)$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$.

§ 2. Espaces de traces a plusieurs variables.

1. Introduction :

1.1. Les théorèmes de traces que nous avons obtenus jusqu'à présent (§ 1) sont des théorèmes de traces en une variable, i.e. des théorèmes où l'on caractérise l'espace parcouru par les traces de certaines fonctions d'une seule variable. On peut se poser le même problème pour des fonctions de plusieurs variables. L'application itérée des résultats du paragraphe 1 nous a déjà fourni certains résultats de traces en plusieurs variables (*cf.* n° 5, § 1); nous allons étudier plus systématiquement ce problème dans le présent paragraphe.

1.2. Introduisons pour commencer quelques nouvelles notations :

Soit X un espace de Banach; on désigne par $L^p(\mathbf{R}^n; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $\vec{x} \mapsto u(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, mesurables à valeurs dans X et telles que

$$\| u \|_{L^p(\mathbf{R}^n; X)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \| u(\vec{x}) \|_X^p \, d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

c'est un espace de Banach pour la norme (1.1).

Pour $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ on pose $\| \vec{x} \| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ et pour $\vec{\alpha} \in \mathbf{N}^n$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (multi-index à composantes entières positives ou nulles), on pose $|\vec{\alpha}| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

On note $L^p_\alpha(\mathbf{R}^n; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $\vec{x} \mapsto u(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ telles que

$$\| \vec{x} \|^\alpha u(\vec{x}) \in L^p(\mathbf{R}^n; X),$$

c'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \| u \|_{L^p_\alpha(\mathbf{R}^n; X)} = \left\| \| \vec{x} \|^\alpha u \right\|_{L^p(\mathbf{R}^n; X)}.$$

Dans tout ce paragraphe, (A_0, A_1) désigne un « couple d'interpolation », i. e. un couple d'espaces de Banach, tels qu'il existe un espace de Banach $\mathfrak{A}$, avec $A_i \subset \mathfrak{A}$ (avec injections continues) $i = 0, 1$.

2. Traces des espaces $W^{\vec{r},p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$.

2.1. Tout d'abord nous posons la

Définition 2.1. — *Pour* $\vec{r} \in \mathbf{N}^n$ *et* $\vec{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, *on désigne par* $W^{\vec{r},p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$ *l'espace des (classes de) fonctions* u *telles que*

$$u \in L^p(\mathbf{R}^n; A_0)$$

$$x_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{r_i} u}{\partial x_i^{r_i}} \in L^p(\mathbf{R}^n; A_1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \| u \|_{L^p(\mathbf{R}^n; A_0)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{r_i} u}{\partial x_i^{r_i}} \right\|_{L^p(\mathbf{R}^n; A_1)}.$$

Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, nous noterons cet espace $W^{\vec{r},p}(A_0, A_1)$.

Ce numéro sera consacré à l'étude des traces des fonctions de $W^{\vec{r},p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$; précisément nous démontrerons le

Théorème 2.1. — *Pour* $0 \leqq \alpha_i \leqq r_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et* $0 < \theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{p} + j_i}{r_i - \alpha_i} < 1$, *il existe un opérateur* $u \mapsto \gamma_j u$ *linéaire continu de* $W^{\vec{r},p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$ *sur* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ *et tel que* $\gamma_j u = \frac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(0)$ *lorsque* u *est* $|j|$ *fois continûment dérivable au voisinage de* 0 *(à valeurs dans* $\mathfrak{A}$*).*

La démonstration de ce théorème utilisera plusieurs lemmes.

2.2. Nous utiliserons les opérateurs G_n définis par l'identité

$$G_n f(t) = \frac{1}{t^{n+1}} \int_0^t s^n f(s)\, ds. \tag{2.1}$$

Les propriétés de G_n que nous utiliserons sont résumées dans le

LEMME 2.1. — *Pour* X *espace de Banach,* $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha + \frac{1}{p} < n+1$, G_n *est linéaire continu de* $L^p_\alpha(X)$ *dans lui-même et de*

$$W^{(m)}(p, \alpha, X; p, \alpha+m, X) \text{ dans } W^{(m+1)}(p, \alpha, X; p, \alpha+m+1, X).$$

Dans l'énoncé du lemme 2.1, il faut faire la convention :

$$W^{(0)}(p, \alpha, X; p, \alpha, X) = L^p_\alpha(X).$$

Démonstration. — Le fait que G_n soit linéaire continu de $L^p_\alpha(X)$ dans lui-même est conséquence de l'inégalité (9.9.10) de [7].

Soit $u \in W^{(m)}(p, \alpha, X; p, \alpha+m, X)$, i.e. telle que $u \in L^p_\alpha(X)$ et $u^{(m)} \in L^p_{\alpha-m}(X)$; on a donc $G_n u \in L^p_\alpha(X)$; calculons $(G_n.u^{(m)}(t)$: pour cela on écrit

$$G_n u(t) = \int_0^1 s^n u(st)\, ds,$$

d'où

$$(2.2) \qquad (G_n.u)^{(j)}(t) = \int_0^1 s^{n+j} u^{(j)}(st)\, ds = \frac{1}{t^{n+j+1}} \int_0^t s^{n+j} u^{(j)}(s)\, ds$$

pour $j = 1, 2, \ldots, m$. On en déduit par dérivation l'identité

$$(G_n.u)^{(m+1)}(t) = \frac{1}{t} u^{(m)}(t) - \frac{n+m+1}{t^{n+m+2}} \int_0^t s^{n+m} u^{(m)}(s)\, ds,$$

et par conséquent on a $(G_n.u)^{(m+1)} \in L^p_{\alpha+m+1}(X)$ grâce à l'inégalité (9.9.10) de [7].

C.Q.F.D.

Remarque 2.1. — Dans la démonstration du lemme 2.1 nous avons établi l'identité :

$$(G_n.u)^{(j)} = G_{n+j}.u^{(j)}$$

2.3. Le lemme principal est le

LEMME 2.2. — *L'opérateur* $u \mapsto u^{(j)}(0)$ *qui est défini pour* $u \in W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1)$ *se prolonge en un opérateur linéaire continu encore noté* $u \mapsto u^{(j)}(0)$ *de*

$$\mathcal{W} = (W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1), L^p_\beta(A_1))_{\theta, p} \qquad \text{dans} \quad (A_0, A_1)_{\tau, p}$$

avec

$$1-\tau=\frac{(m-\alpha_1)(1-\theta)-\beta\theta-j-\frac{1}{p}}{\alpha_0-\alpha_1+m}$$

lorsque

$$\alpha_0(1-\theta)+\beta\theta+j+\frac{1}{p}>0 \quad et \quad \alpha_1(1-\theta)+\beta\theta+j+\frac{1}{p}<m(1-\theta).$$

Si de plus on a $\alpha_0+\frac{1}{p}>0$, $\alpha_1+\frac{1}{p}>0$, $\beta+\frac{1}{p}>0$ *et* $0<(m+\beta-\alpha_1)(1-\theta)<m$, *alors l'application* $u\mapsto u^{(j)}(0)$ *est surjective de* $\mathcal{W}$ *sur* $(A_0, A_1)_{\tau,p}$.

Démonstration. — Nous employons une méthode voisine de celle utilisée au paragraphe 1, n° 3.

D'après le lemme 2.1, on voit que l'opérateur $G_n^{[m]}$ (i.e. G_n itéré m fois) est pour $n>\beta+\frac{1}{p}-1$, linéaire continu de $L^p_\beta(A_1)$ dans $W^{(m)}(p, \beta, A_1; p, \beta+m, A_1)$; toujours d'après le lemme 2.1, $G_n^{[m]}$ est linéaire continu de $L^p_{\alpha_1}(A_1)$ dans lui-même pour $n>\alpha_1+\frac{1}{p}-1$; enfin grâce à l'identité

$$(G_n^{[m]}.u)^{(m)}=G_{n+m}^{[m]}.u^{(m)}$$

et au lemme 2.1, on voit que $u\mapsto(G_n^{[m]}.u)^{(m)}$ est pour $n+m>\alpha_0+\frac{1}{p}-1$ linéaire continu de $W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1)$ dans $L^p_{\alpha_1}(A_1)$.

En résumé, pour n assez grand $G_n^{[m]}$ est linéaire continu de

$$W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1) \quad \text{dans} \quad W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1)$$

et de

$$L^p_\beta(A_1) \quad \text{dans} \quad W^{(m)}(p, \beta, A_1; p, \beta+m, A_1).$$

Par interpolation on en déduit que $G_n^{[m]}$ applique $\mathcal{W}$ dans

$$\mathcal{X}=(W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1), W^{(m)}(p, \beta, A_1; p, \beta+m, A_1))_{\theta,p}.$$

Évidemment $u\mapsto u$ est linéaire continu de $\mathcal{X}$ dans

$$(L^p_{\alpha_0}(A_0), L^p_\beta(A_1))_{\theta,p}=L^p_{\alpha_0(1-\theta)+\beta\theta}((A_0, A_1)_{\theta,p})$$

d'après [19]; (*voir* aussi chap. 0) et $u \mapsto u^{(m)}$ est linéaire continu de $\mathfrak{X}$ dans

$$(L^p_{\alpha_1}(A_1), L^p_{\beta+m}(A_1))_{\theta,p} = L^p_{\alpha_1(1-\theta)+(\beta+m)\theta}(A_1)$$

(*cf.* [19] et chap. 0). Par conséquent on a l'inclusion

$$\mathfrak{X} \subset W^{(m)}(p, \alpha_0(1-\theta)+\beta\theta, (A_0, A_1)_{\theta,p}; p, \alpha_1(1-\theta)+(\beta+m)\theta, A_1)$$

et pour

$$\alpha_0(1-\theta)+\beta\theta+j+\frac{1}{p}>0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1(1-\theta)+(\beta+m)\theta+j+\frac{1}{p}<m,$$

d'après le théorème de trace (*cf.* chap. 0), $u \mapsto (G^{[m]}_n . u)^{(j)}(0)$ est linéaire continu de $\mathfrak{W}$ dans

$$T^{(m)}_j(p, \alpha_0(1-\theta)+\beta\theta, (A_0, A_1)_{\theta,p}; p, \alpha_1(1-\theta)+(\beta+m)\theta, A_1) = ((A_0, A_1)_{\theta,p}, A_1)_{\omega,p},$$

avec

$$\omega = \frac{\alpha_0(1-\theta)+\beta\theta+j+\frac{1}{p}}{(\alpha_0-\alpha_1+m)(1-\theta)};$$

enfin d'après le théorème de réitération ce dernier espace est encore $(A_0, A_1)_{\tau,p}$ avec

$$1-\tau = \frac{(m-\alpha_1)(1-\theta)-\beta\theta-j-\frac{1}{p}}{\alpha_0-\alpha_1+m}.$$

Comme

$$(G^{[m]}_n . u)^{(j)}(0) = (G^{[m]}_{n+j} . u^{(j)})(0) = \frac{1}{(n+j+1)^m} u^{(j)}(0)$$

pour $u \in W^{(m)}(p, \alpha_0, A_0;\ p, \alpha_1, A_1)$ qui est un sous-espace dense de $\mathfrak{W}$, nous avons ainsi prouvé que $u \mapsto u^{(j)}(0)$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathfrak{W}$ dans $(A_0, A_1)_{\tau,p}$ la première partie du lemme 2.2 est démontrée.

Pour démontrer la seconde partie, on fixe $a \in (A_0, A_1)_{\tau,p}$ et l'on remarque que grâce à l'identité (*cf.* chap. 0)

$$(A_0, A_1)_{\tau,p} = T^m_j(p, \gamma_0, A_0; p, \gamma_1, A_1),$$

où

$$\gamma_0 = (m+\beta-\alpha_1)\theta+\alpha_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = (m+\beta-\alpha_1)\theta+\alpha_1,$$

il existe une fonction φ telle que $\varphi \in L^p_{\gamma_0}(A_0)$, $\varphi^{(m)} \in L^p_{\gamma_1}(A_1)$ et $\varphi^{(j)}(0) = a$ (remarquons que par hypothèse on a $\gamma_0 + \frac{1}{p} + j > 0$ et $\gamma_1 + \frac{1}{p} + j < m$).

Nous allons vérifier que $\varphi \in \mathfrak{V}$: Pour cela on remarque que $\varphi(s) = F(0, s)$ avec $F(t, s) = \varphi(t+s)$ et que

$$F \in W^m\big(p, \delta_0, W^m(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1); p, \delta_1, L^p_\beta(A_1)\big), \tag{2.3}$$

où

$$\delta_0 = (m + \beta - \alpha_1)\,\theta - \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \delta_1 = m\theta + (\alpha_1 - \beta)(1-\theta) - \frac{1}{p},$$

d'où (puisque par hypothèse on a $\delta_0 + \frac{1}{p} > 0$ et $\delta_1 + \frac{1}{p} < m$),

$$u \in T^m_0\big(p, \delta_0, W^m(p, \alpha_0, A_0; p, \alpha_1, A_1); p, \delta_1, L^p_\beta(A_1)\big) = \mathfrak{V},$$

car $\theta = \dfrac{\delta_0 + \frac{1}{p}}{\delta_0 - \delta_1 + m}$. Il nous reste donc seulement à prouver (2.3), i.e. que

$$I = \int_0^{+\infty} t^{\delta_0 p} \int_0^{+\infty} s^{\alpha_0 p} \| F(t, s) \|^p_{A_0}\, ds\, dt < +\infty, \tag{2.4}$$

$$J = \int_0^{+\infty} t^{\delta_0 p} \int_0^{+\infty} s^{\alpha_1 p} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial s^m}(t, s) \right\|^p_{A_1} ds\, dt < +\infty, \tag{2.5}$$

$$K = \int_0^{-\infty} t^{\delta_1 p} \int_0^{+\infty} s^{\beta p} \left\| \frac{\partial^m F}{\partial s^m}(t, s) \right\|^p_{A_1} ds\, dt < +\infty. \tag{2.6}$$

Pour cela on écrit

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} t^{\delta_0 p} \int_0^{+\infty} s^{\alpha_0 p} \| \varphi(t+s) \|^p_{A_0}\, ds\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\delta_0 p} \int_t^{+\infty} (\sigma - t)^{\alpha_0 p} \| \varphi(\sigma) \|^p_{A_0}\, d\sigma\, dt \\ &= \int^{+\infty} \| \varphi(\sigma) \|^p_{A_0} \int_0^{\sigma} t^{\delta_0 p} (\sigma - t)^{\alpha_0 p}\, dt\, d\sigma \\ &= C \int_0^{+\infty} \sigma^{\delta_0 p + \alpha_0 p + 1} \| \varphi(\sigma) \|^p_{A_0}\, d\sigma, \end{aligned}$$

où $C = \int_0^1 t^{\delta_0 p}(1-t)^{\alpha_0 p} dt$, (on a par hypothèse $\delta_0 p > -1$ et $\alpha_0 p > -1$); et l'on a (2.4) car $\delta_0 p + \alpha_0 p + 1 = \gamma_0 p$; (2.5) et (2.6) se démontrent de manière analogue.

2.4. Nous pouvons à présent démontrer le théorème 2.1 :

Démonstration. — On prouve le théorème par récurrence sur n. Lorsque $n = 1$, l'espace des restrictions à $]0, +\infty[$ des fonctions de $W^{\vec{r}, p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$ est $W^1(p, 0, A_1; p, \alpha_1, A_1)$, et le théorème est alors un cas particulier du théorème de traces (chap. 0). Nous admettons le résultat en dimension $n-1$ et nous en déduisons le résultat en dimension n : Soit $u \in W^{\vec{r}, p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$, avec $\vec{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ et $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; posons $\vec{r}' = (r_1, \ldots, r_{n-1})$ et $\vec{\alpha}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ $\vec{j}' = (j_1, \ldots, j_{n-1})$, si nous considérons u comme fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ seulement, on a évidemment

$$u \in L^p(R^{n-1}; W^{r_n}(p, 0, A_0; p, \alpha_n, A_1)),$$

$$x_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{r_i} u}{\partial x_i^{r_i}} \in L^p(R^{n-1}; L^p(R; A_1)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

i.e.

$$u \in W^{\vec{r}', p}_{\vec{\alpha}'}(W^{r_n}(p, 0, A_0; p, \alpha_n, A_1), L^p(R; A_1)),$$

et par conséquent

$$\gamma_{\vec{j}'} u \in (W^{r_n}(p, 0, A_0; p, \alpha_n, A_1), L^p(R; A_1))_{\theta', p}, \text{ avec } \theta' = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{r_1 - \alpha_i}\left(\frac{1}{p} + j_i\right).$$

grâce à notre hypothèse de récurrence; $\gamma_{\vec{j}'} u$ est une fonction de la seule variable x_n. D'après l'hypothèse de récurrence $\gamma_{\vec{j}'} u$ parcourt

$$(W^{r_n}(p, 0, A_0; p, \alpha_n, A_1), L^p(R; A_1))_{\theta', p}$$

lorsque u parcourt $W^{\vec{r}, p}_{\vec{\alpha}}(A_0, A_1)$ et par conséquent grâce au lemme 2.2, $\frac{\partial^{j_n}[\gamma_{\vec{j}'} u]}{\partial x_n^{j_n}}(0)$ parcourt $(A_0, A_1)_{\theta, p}$, avec

$$1 - \theta = \frac{(r_n - \alpha_n)(1 - \theta') - j_n - \frac{1}{p}}{r_n - \alpha_n}, \qquad \text{i.e.} \qquad \theta = \theta' + \frac{j_n + \frac{1}{p}}{r_n - \alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{j_i + \frac{1}{p}}{r_i - \alpha_i}.$$

Si nous posons $\gamma_j u = \dfrac{\partial^{j_n}[\gamma_j, u]}{\partial x_n^{j_n}}(0)$, l'opérateur γ_j ainsi défini remplit toutes les conditions de l'énoncé du théorème.

C.Q.F.D.

Remarque 2.1. — On vérifie aisément par régularisation que lorsque

$$\alpha_i = 0 \ (i = 1, 2 \ldots, n), \ C^\infty(\mathbf{R}^n; A_0) \cap W^{\vec{r},p}(A_0, A_1)$$

est dense dans $W^{\vec{r},p}(A_0, A_1)$; $C^\infty(\mathbf{R}_n; A_0)$ désignant l'espace des fonctions de $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ qui sont indéfiniment différentiables à valeurs dans A_0. Alors du théorème 2.1 on déduit que pour $0 < \theta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{r_i}\left(\dfrac{1}{p} - j_i\right) < 1$, l'opération usuelle $u \mapsto \dfrac{\partial^{|j|} u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}(0)$ se prolonge en un opérateur linéaire continu de $W^{\vec{r},p}(A_0, A_1)$ sur $(A_0, A_1)_{\theta,p}$.

Remarque 2.2. — La même méthode, consistant à prendre les traces par rapport à chacune des variables successivement, permet d'étudier les traces des espaces $W^{\vec{r},p}_{\vec{\alpha}}(A_0; A_1, \ldots, A_n)$; ce symbole désignant l'espace des fonctions $u \in L^p(R^n; A_0)$ telles que

$$x_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{r_i} u}{\partial x_i^{r_i}} \in L^p(R^n; A_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ est une famille de $n+1$ espaces de Banach tous contenus dans un même espace (de Banach) $\mathfrak{A}$; notre méthode ne permet pas dans ce cas d'obtenir la surjectivité.

3. Traces des espaces $W_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$.

3.1. Par analogie avec [14], nous posons la

Définition 3.1. — $W_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ *est l'espace des* (*classes de*) *fonctions* u *définies dans* R^n *telles que*

$$u \in L^{p_0}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n; A_0) \text{ et } D^{\vec{\beta}} u \in L^{p_1}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n; A_1) \text{ pour } \left|\vec{\beta}\right| = m.$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$u \mapsto \| u \|_{W_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)} = \| u \|_{L^{p_0}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n; A_0)} + \sum_{|\vec{\beta}| = m} \left\| D^{\vec{\beta}} u \right\|_{L^{p_1}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n; A_1)}.$$

Le présent numéro est consacré à l'étude des traces de ces espaces. Remarquons tout d'abord, que contrairement aux espaces étudiés dans le numéro précédent, les espaces $W_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ sont symétriques par rapport aux n variables, i.e. sont invariants lorsqu'on effectue une rotation des axes de coordonnées dans $\mathbf{R}^n$; nous utiliserons par conséquent une méthode différente de celle du numéro précédent.

Nous prouverons le :

THÉORÈME 3.1. — *Pour* $\alpha_0 + \frac{n}{p} + j > 0$, $\alpha_1 + \frac{n}{p_1} + j < m$ *et* $\vec{\beta}$ *multi-entier avec* $|\vec{\beta}| = j$, *il existe un opérateur* $\gamma_{\vec{\beta}}$ *ayant les propriétés suivantes*

(i) $\gamma_{\vec{\beta}}$ *est linéaire continu de*

$$W_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \quad \textit{dans} \quad T_j^m\left(p_0, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}, A; p_1, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_1}, A_1\right)$$

(ii) $\gamma_{\vec{\beta}} u = D^{\vec{\beta}} u(0)$ *lorsque* u *est* j *fois continûment dérivable (à valeurs dans* $\mathfrak{A}$*) au voisinage de zéro.*

Le théorème résultera de plusieurs lemmes.

3.2. Nous noterons $\mathfrak{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ l'espace des fonctions définies dans $\mathbf{R}^n$, telles que

$$u \in L^{p_0}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n; A_0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^m u}{\partial r^m} \in L^{p_1}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n; A_1) \quad \left(\text{où } r = \left\| \vec{x} \right\|\right).$$

Σ_n désignera la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ et $d\sigma_n$ la mesure superficielle sur Σ_n.

Il est évident que pour $\vec{x} = r\vec{\omega}$ avec $r = \left\| \vec{x} \right\|$ et $\vec{\omega} \in \Sigma_n$ on a

$$d\vec{x} = r^{n-1}\, dr\, d\sigma_n\left(\vec{\omega}\right)$$

et par conséquent pour $u \in \mathcal{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ on a

$$\int_0^{+\infty} r^{\alpha_0 p_0 + n - 1} \int_{\Sigma_n} \| u(r\vec{\omega}) \|_{A_0}^{p_0} d\sigma_n(\vec{\omega})\, dr < +\infty, \tag{3.1}$$

$$\int_0^{+\infty} r^{\alpha_1 p_1 + n - 1} \int_{\Sigma_n} \left\| \frac{\partial^m u}{\partial r^m}(r\vec{\omega}) \right\|_{A_1}^{p_1} d\sigma_n(\vec{\omega})\, dr < +\infty \tag{3.2}$$

grâce au théorème de Fubini.

De (3.1) on déduit que pour presque tout $r > 0$,

$$u(r\vec{\omega}) \in L^{p_0}(\Sigma_n; A_0) \subset L^1(\Sigma_n; \mathcal{A}).$$

Donc la fonction

$$U_P(r) = \int_{\Sigma_n} u(r\vec{\omega})\, P(\vec{\omega})\, d\sigma_n(\vec{\omega}),$$

où P est un polynome, est définie pour presque tout $r > 0$.

Lemme 3.1. — *L'application*

$$u \mapsto U_P(r) = \int_{\Sigma_n} u(r\vec{\omega})\, P(\vec{\omega})\, d\sigma_n(\vec{\omega})$$

est linéaire continue de

$$\mathcal{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

dans

$$W^m\left(p_0, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}, A_0; p_1, \alpha_1 + \frac{n-1}{p_1}, A_1\right).$$

Démonstration. — On vérifie en premier, que $u \mapsto U_P$ est linéaire continue de $L^{p_0}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n; A_0)$ dans $L^{p_0}_{\alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}}(A_0)$:

$$\| U_P(r) \|_{A_0} \leq C \left(\int_{\Sigma_n} | u(r\vec{\omega}) |_{A_0}^{p_0} d\sigma_n(\vec{\omega}) \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

d'où

$$\left(\int_0^{+\infty} r^{\alpha_0 p_0 + n - 1} \| U_P(r) \|_{A_0}^{p_0} dr \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\leq C \left(\int_0^{+\infty} r^{\alpha_0 p_0 + n - 1} \int_{\Sigma_n} \| u(r\vec{\omega}) \|_{A_0}^{p_0} d\sigma_n(\vec{\omega})\, dr \right)^{\frac{1}{p_0}} = C \| u \|_{L^{p_0}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n; A_0)}.$$

Calculons à présent $U_p^{(m)}(r)$: Les inégalités (3.1) et (3.2) montrent que u considérée comme fonction de r est élément de

$$W^m\left(p_0,\ \alpha_0+\frac{n-1}{p_0},\ L^{p_0}(\Sigma_n;\ A_0);\ p_1,\ \alpha_1+\frac{n-1}{p_1},\ L^{p_1}(\Sigma_n;\ A_1)\right)$$

et par conséquent m fois dérivable au sens ordinaire dans $]0, +\infty[$ à valeurs dans $L^{p_0}(\Sigma_n;\ A_0)+L^{p_1}(\Sigma_n;\ A_1)\subset L^1(\Sigma_n;\ \mathfrak{A})$ (et $m-1$ fois continûment dérivable) on peut donc écrire

$$(3.3)\quad U_P^{(j)}(r)=\int_{\Sigma_n}\frac{\partial^j u}{\partial r^j}(r\vec{\omega})\,P(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega})\qquad \text{pour}\quad j=1,2,\ldots,m).$$

En particulier

$$u\mapsto U_P^{(m)}(r)=\int_{\Sigma_n}\frac{\partial^j u}{\partial r^j}(r\vec{\omega})\,P(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega})$$

est linéaire continue de

$$\mathfrak{W}_n^m(p_0,\alpha_0,A_0;\ p_1,\alpha_1,A_1)\quad\text{dans}\quad L^{p_1}_{\alpha_1+\frac{n-1}{p_1}}(A_1)$$

car on a comme pour U_P :

$$\left(\int_0^{+\infty} r^{\alpha_1 p_1+n-1}\,\|\,U_P^{(m)}(r)\,\|_{A_1}^{p_1}\,dr\right)^{\frac{1}{p_1}}\leq C\left\|\frac{\partial^m u}{\partial r^m}\right\|_{L^{p_1}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n;\,A_1)}.$$

Le lemme 3.1 est démontré.

On en déduit que lorsque $\alpha_0+\frac{n}{p_0}+j>0$ et $\alpha_1+\frac{n}{p_1}+j<m$, l'application $u\mapsto U_P^{(j)}(0)$ est linéaire continue de

$$\mathfrak{W}_n^m(p_0,\alpha_0,A_0;\ p_1,\alpha_1,A_1)$$

dans

$$T_j^m\left(p_0,\ \alpha_0+\frac{n-1}{p_0},\ A_0;\ p_1,\ \alpha_1+\frac{n-1}{p_1},\ A_1\right).$$

3.3. Il nous faut donc chercher ce qu'est $U_P^{(j)}(0)$:

Lemme 3.2. — *Pour u, j fois continûment dérivable au voisinage de 0 on a*

$$U_P^{(j)}(0)=\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n\geq 0\\ i_1+\ldots+i_n=j}}\frac{j!}{i_1!\ldots i_n!}\left(\int_{\Sigma_n}\omega_1^{i_1}\ldots\omega_n^{i_n}\,P(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega})\right)\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}(0).$$

Ceci résulte de l'identité

$$U_P^{(j)}(r) = \int_\Sigma \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \geq 0 \\ i_1+\dots+i_n=j}} \frac{j!}{i_1!\dots i_n!}\omega_1^{i_1}\dots\omega_n^{i_n}\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}(r\vec{\omega})\,P(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega}).$$

LEMME 3.3. — *Il existe une famille de polynomes* $\{P_{k_1,\dots,k_n}\}_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ k_1+\dots+k_n=}}$ *telle que la matrice*

$$\left\| \frac{j!}{i_1!\dots i_n!}\int_{\Sigma_n}\omega_1^{i_1}\dots\omega_n^{i_n}P_{k_1,\dots,k_n}(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega}) \right\|_{\substack{i_1,\dots,i_n \geq 0 \\ k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ i_1+\dots+i_n=j \\ k_1+\dots+k_n=j}}$$

soit inversible.

Démonstration. — Il revient au même de considérer la matrice

$$\left\| \int_{\Sigma_n}\omega_1^{i_1}\dots\omega_n^{i_n}P_{k_1,\dots,k_n}(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega}) \right\|_{\substack{i_1,\dots,i_n \geq 0 \\ k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ i_1+\dots+i_n=j \\ k_1+\dots+k_n=j}}$$

Notons $\mathfrak{P}_j$ l'espace vectoriel des polynomes réels homogènes de degré j en n variables. $\mathfrak{P}_j$ est de dimension finie et les polynomes $Q_{k_1,\dots,k_n}(x) = x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ avec $k_1+\dots+k_n=j$ forment une base de $\mathfrak{P}_j$.

Nous munissons $\mathfrak{P}_j$ du produit scalaire

$$P, Q \to (P, Q)_{\mathfrak{P}_j} = \int_{\Sigma_n} P(\vec{\omega})\,Q(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega})$$

et nous notons $\{P_{k_1,\dots,k_n}\}_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ k_1+\dots+k_n=j}}$ une base orthonormée construite à l'aide du procédé de Schmidt à partir de la base $\{Q_{k_1,\dots,k_n}\}_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ k_1+\dots+k_n=j}}$.

Pour $P \in \mathfrak{P}_j$, les identités

$$\int_{\Sigma_n} P(\vec{\omega})\,P_{k_1,\dots,k_n}(\vec{\omega})\,d\sigma_n(\vec{\omega}) = 0$$

pour $k_1, \ldots, k_n \geqq 0$, $k_1 + \ldots + k_n = j$, impliquent $P = 0$; plus explicitement, si

$$P(\vec{x}) = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n \geqq 0 \\ i_1 + \ldots + i_n = j}} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n},$$

les nombres $\lambda_{i_1, \ldots, i_n}$ étant arbitraires, les identités

$$\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n \geqq 0 \\ i_1 + \ldots + i_n = j}} \lambda_{i_1, \ldots, i_n} \int_{\Sigma_n} \omega_1^{i_1} \ldots \omega_n^{i_n} P_{k_1, \ldots, k_n}(\vec{\omega})\, d\sigma_n(\vec{\omega}) = 0$$

pour $k_1, \ldots, k_n \geqq 0$, $k_1 + \ldots + k_n = j$, impliquent $\lambda_{i_1, \ldots, i_n} = 0$ pour $i_1, \ldots, i_n \geqq 0$, $i_1 + \ldots + i_n = j$; ceci signifie précisément que la matrice

$$\left\| \int_{\Sigma_n} \omega_1^{i_1} \ldots \omega_n^{i_n} P_{k_1, \ldots, k_n}(\vec{\omega})\, d\sigma_n(\vec{\omega}) \right\|_{\substack{i_1, \ldots, i_n \geqq 0 \\ i_1 + \ldots + i_n = j \\ k_1, \ldots, k_n \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_n = j}}$$

est inversible.

C. Q. F. D.

D'après le lemme 3.2 on a (pour u, j fois continûment dérivable au voisinage de zéro)

$$\sum_{\substack{i_1, \ldots, i_n \geqq 0 \\ i_1 + \ldots + i_n = j}} \frac{j!}{i_1! \ldots i_n!} \times \left(\int_{\Sigma_n} \omega_1^{i_1} \ldots \omega_n^{i_n} P_{k_1, \ldots, k_n}(\vec{\omega})\, d\sigma_n(\vec{\omega}) \right) \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(0) = U^{(j)}_{P_{k_1, \ldots, k_n}}(0)$$

pour $k_1, \ldots, k_n \geqq 0$, $k_1 + \ldots + k_n = j$. Ces identités forment un système dont le déterminant est non nul d'après le lemme 3.3; par conséquent, ce système peut être résolu en $\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(0)$ et il existe des nombres $\lambda^{i_1, \ldots, i_n}_{k_1, \ldots, k_n}$ tels que

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(0) = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_n \geqq 0 \\ k_1 + \ldots + k_n = j}} \lambda^{i_1, \ldots, i_n}_{k_1, \ldots, k_n} U^{(j)}_{P_{k_1, \ldots, k_n}}(0).$$

Nous posons *par définition* pour $u \in \mathfrak{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$,

$$\gamma_{i_1,\dots,i_n} u = \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \geq 0 \\ k_1+\dots+k_n=j}} \lambda_{k_1,\dots,k_n}^{i_1,\dots,i_n} \mathrm{U}^{(j)}_{p_{k_1},\dots,p_{k_n}}(0).$$

3.4. D'après le lemme 3.1, $u \mapsto \gamma_{i_1,\dots,i_n} u$ est linéaire continu de

$$\mathfrak{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

dans

$$\mathrm{T}_j^m\left(p_0, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}, A_0; p_1, \alpha_1 + \frac{n-1}{p_1}, A_1\right)$$

et

$$\gamma_{i_1,\dots,i_n} u = \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(0),$$

lorsque u est j fois continûment dérivable au voisinage de zéro (à valeurs dans $\mathfrak{A}$), d'après ce qui précède. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant qui *implique* le théorème 3.1 :

THÉORÈME 3.1'. — *Pour* $\alpha_0 + \frac{n}{p_0} + j > 0$, $\alpha_1 + \frac{n}{p_1} + j < m$ *et* $\vec{\beta}$ *multi-entier avec* $|\vec{\beta}| = j$, *il existe un opérateur* $\gamma_{\vec{\beta}}$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\gamma_{\vec{\beta}}$ *est linéaire continu de*

$$\mathfrak{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

dans

$$\mathrm{T}_j^m\left(p_0, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}, A_0; p_1, \alpha_1 + \frac{n-1}{p_1}, A_1\right).$$

(ii) $\gamma_{\vec{\beta}} u = \mathrm{D}^{\vec{\beta}} u(0)$ *lorsque* u *est* j *fois continûment dérivable (à valeurs dans* $\mathfrak{A}$*) au voisinage de zéro.*

Lorsque $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, on vérifie aisément par régularisation que

$$\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n; A_0) \cap \mathrm{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$$

est dense dans $\mathrm{W}_n^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ et par conséquent on a le

COROLLAIRE 3.1. — *Pour* $\frac{n}{p_0} + j > 0$, $\frac{n}{p_1} + j < m$ *et* $\vec{\beta}$ *multi-entier de longueur* $|\vec{\beta}| = j$, *l'opération* $u \mapsto \mathrm{D}^{\vec{\beta}} u(0)$ *qui est définie pour*

$$u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n; A_0) \cap \mathrm{W}_n^m(p_0, 0, A_0; p_1, 0, A_1)$$

se prolonge en un opérateur linéaire continu de

$$W_u^m(p_0, 0, A_0; p_1, 0, A_1) \quad \textit{dans} \quad T_j^m\left(p_0, \frac{n-1}{p_0}, A_0; p_1, \frac{n-1}{p_1}, A_1\right).$$

3.5. Il se pose à présent le problème de savoir si $\gamma_{\vec{\beta}}$ est surjectif. Nous ne savons résoudre ce problème que dans le cas particulier où $\vec{\beta} = \vec{0}$:

THÉORÈME 3.2. — *Pour* $\alpha_0 + \frac{n}{p_0} > 0$, $\alpha_1 + \frac{n}{p_1} < m$, *l'opérateur* γ_0 *est linéaire continu de*

$$W_u^m(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1) \quad \textit{sur} \quad T_0^m\left(p_0, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}, A_0; p_1, \alpha_1 + \frac{n-1}{p_1}, A_1\right).$$

Nous utiliserons le

LEMME 3.4. — *Pour* $a \in T_0^m(p_0, \alpha_0', A_0; p_1, \alpha_1', A_1)$ *avec* $\alpha_0' + \frac{1}{p_0} > 0$, $\alpha_1' + \frac{1}{p_1} < m$, *il existe une fonction* $\varphi \in W^m(p_0, \alpha_0', A_0; p_1, \alpha_1', A_1)$ *telle que* $\varphi(0) = a$ *et de plus telle que*

$$\varphi^{(j)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1' + j - m}(A_1) \qquad \textit{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Démonstration. — On applique une méthode analogue à celle utilisée dans [5]. D'après la définition des espaces de traces nous savons qu'il existe $u \in W^m(p_0, \alpha_0', A_0; p_1, \alpha_1', A_1)$ telle que $u(0) = a$.

Supposons que nous connaissions une $u \in W^m(p_0, \alpha_0', A_0; p_1, \alpha_1', A_1)$ avec $u(0) = a$ et telle que $u^{(l)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1', m}(A_1)$ pour $j = k$, $k+1, \ldots, m-1$, nous allons indiquer une construction permettant d'en déduire une $\varphi \in W^m(p_0, \alpha_0', A_0; p_1, \alpha_1', A_1)$ avec $\varphi(0) = a$ et $\varphi^{(l)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1', m}(A_1)$ pour $j = k-1, k, \ldots, m-1$; ceci démontrera le lemme.

On prend pour φ la fonction

$$(3.4) \quad \varphi(t) = \frac{l-k+1}{1-k} w(t), \qquad \text{avec} \quad w(t) = u(t) - \frac{l}{t^{l-k+1}} \int_0^t s^{l-k} u(s)\, ds.$$

Comme $u \in W^m(p_0, \alpha_0', A_0; p_1, \alpha_1', A_1)$ il existe μ tel que u et ses dérivées d'ordre $\leq m-1$, considérées comme fonctions à valeurs

dans $\mathcal{A}$, croissent au plus comme t^{μ} au voisinage de zéro; par conséquent, pour l assez grand on peut écrire

$$(3.5)\quad w^{(j)}(t) = u^{(j)}(t) - \frac{l}{t^{l-k+j+1}} \int_0^t s^{l-k+j}\, u^{(j)}(s)\, ds \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

et en intégrant par parties on a

$$(3.6)\quad w^{(k-1)}(t) = u^{(k-1)}(t) - \frac{l}{t^l} \int_0^t s^{l-1}\, u^{(k-1)}(s)\, ds = \frac{1}{t^l} \int_0^t s^l\, u^{(k)}(s)\, ds.$$

Pour l assez grand, on vérifie en utilisant l'inégalité (9.9.10) de [7] que grâce à (3.4) on a $w \in L^{p_0}_{\alpha_0'}(A_0)$, grâce à (3.5) on a

$$w^{(j)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1' + j - m}(A_1) \qquad \text{pour} \quad j = k, k+1, \ldots, m,$$

et grâce à (3.6) on a

$$w^{(k-1)}(t) \in L^{p_1}_{\alpha_1' + k - 1 - m}(A_1).$$

Comme $w(0) = \frac{1-k}{l-k+1} u(0) = \frac{1-k}{l-k+1} a$, la fonction v a bien les propriétés requises

C. Q. F. D.

3.6. Avant de passer à la démonstration du théorème 3.2 il nous faut encore vérifier le

Lemme 3.5. — *Soit* $f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|)$ *une fonction qui ne dépend que de* $\|\vec{x}\|$; *on suppose que* g *est* m *fois dérivable, alors pour* $|\vec{\alpha}| \leq m$ *on a*

$$D^{\vec{\alpha}} f(x) = \sum_{j=1}^{|\vec{\alpha}|} \Phi_{j,\vec{\alpha}}(\vec{x})\, g^{(j)}(\|\vec{x}\|)$$

pour $\vec{x} \in \mathbf{R}^n_* = \mathbf{R}^n - \{0\}$, *où les* $\Phi_{j,\vec{\alpha}}$ *sont des fonctions indéfiniment dérivables dans* $\mathbf{R}^n_*$ *et homogènes de degré* $j - |\vec{\alpha}|$.

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur $|\vec{\alpha}|$. Vérifions le lemme pour $|\vec{\alpha}| = 1$: dans ce cas, il résulte de l'identité

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial \|\vec{x}\|}{\partial x_i}\, g'(\|\vec{x}\|) = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|}\, g'(\|\vec{x}\|).$$

Supposons à présent le lemme vérifié pour $|\vec{\alpha}| \leq k$ et montrons que cela implique le lemme pour $|\vec{\alpha}| = k+1$. Fixons $\vec{\alpha}$ avec $|\vec{\alpha}| = k+1$; il existe alors $\vec{\alpha}'$ avec $|\vec{\alpha}'| = k$ et i tels que $D^{\vec{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x_i} D^{\vec{\alpha}'}$, on a donc

$$D^{\vec{\alpha}} f(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{k} \Phi_{j,\vec{\alpha}'}(\vec{x})\, g^{(j)}(\|\vec{x}\|)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi_{j,\vec{\alpha}'}}{\partial x_i}(\vec{x})\, g^{(j)}(\|\vec{x}\|) + \Phi_{j,\vec{\alpha}'}(\vec{x}) \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} g^{(j+1)}(\|\vec{x}\|).$$

Grâce à notre hypothèse de récurrence $\frac{\partial \Phi_{j,\vec{\alpha}'}}{\partial x_i}$ est indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^n_*$ et homogène de degré $j-k-1$ et $\frac{x_i}{\|\vec{x}\|} \Phi_{j,\vec{\alpha}'}(\vec{x})$ est indéfiniment dérivable dans $\mathbf{R}^n_*$ et homogène de degré $j-k$; si l'on pose $\Phi_{1,\vec{\alpha}} = \frac{\partial \Phi_{1,\vec{\alpha}'}}{\partial x_i}$

$$\Phi_{j,\vec{\alpha}} = \frac{\partial \Phi_{j,\vec{\alpha}'}}{\partial x_i}(\vec{x}) + \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} \Phi_{j-1,\vec{\alpha}'}(\vec{x}) \quad (j = 2, \ldots, k),$$

$$\Phi_{k+1,\vec{\alpha}} = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|} \Phi_{k,\vec{\alpha}'},$$

on a le résultat désiré.

3.7. *Démonstration du théorème* 3.2. — Il suffit de vérifier que pour $a \in \mathrm{T}_0^m\left(p_0, \alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}, \mathrm{A}_0; p_1, \alpha_1 + \frac{n-1}{p_1}, \mathrm{A}_1\right)$ il existe $u \in \mathrm{W}_n^m(p_0, \alpha_0, \mathrm{A}_0; p_1, \alpha_1, \mathrm{A}_1)$ telle que $u(0) = a$. D'après le lemme 3.4 nous savons déjà qu'il existe

$$\varphi \in \mathrm{L}^{p_0}_{\alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}}(\Lambda_0), \qquad \text{avec} \quad \varphi^{(j)}(t) \in \mathrm{L}^{p_1}_{\alpha_1 + \frac{n-1}{p_1} + j - m}(\Lambda_1)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m) \quad \text{et} \quad \varphi(0) = a.$$

La fonction

$$u(\vec{x}) = \varphi(\|\vec{x}\|)$$

répond à la question; en effet, on a $u(0) = a$, et

$$\| u \|_{\mathrm{L}^{p_0}_{\alpha_0}(\mathbf{R}^n;\, \mathrm{A}_0)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left\| \vec{x} \right\|^{\alpha_0 p_0} \left\| \varphi\left(\left\| \vec{x} \right\| \right) \right\|^{p_0}_{\mathrm{A}_0} d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} \int_{\Sigma_n} r^{\alpha_0 p_0 + n - 1} \| \varphi(r) \|^{p_0}_{\mathrm{A}_0} \, dr \, d\sigma_n\left(\vec{\omega}\right) \right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$= | \Sigma_n |^{\frac{1}{p_0}} \| \varphi \|_{\mathrm{L}^{p_0}_{\alpha_0 + \frac{n-1}{p_0}}(\mathrm{A}_0)} < +\infty ,$$

où $|\Sigma_n|$ désigne la mesure de Σ_n, i. e. $\int_{\Sigma_n} d\sigma_n\left(\vec{\omega}\right)$; il nous reste à vérifier que $\mathrm{D}^{\vec{\alpha}} u \in \mathrm{L}^{p_1}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n; \mathrm{A}_1)$ pour $\left|\vec{\alpha}\right| = m$. D'après le lemme 3.5, nous avons

$$\mathrm{D}^{\vec{\alpha}} u\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{j,\vec{\alpha}}\left(\vec{x}\right) \varphi^{(j)}\left(\left\| \vec{x} \right\| \right),$$

d'où

$$\left\| \mathrm{D}^{\vec{\alpha}} u\left(\vec{x}\right) \right\|_{\mathrm{A}_1} \leq \mathrm{C} \sum_{j=1}^{m} \left\| \vec{x} \right\|^{j-m} \left\| \varphi^{(j)}\left(\left\| \vec{x} \right\| \right) \right\|_{\mathrm{A}_1}$$

et

$$\left\| \mathrm{D}^{\vec{\alpha}} u \right\|_{\mathrm{L}^{p_1}_{\alpha_1}(\mathbf{R}^n;\, \mathrm{A}_1)} \leq \mathrm{C} \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left\| \vec{x} \right\|^{(\alpha_1 + j - m) p_1} \left\| \varphi^{(j)}\left(\left\| \vec{x} \right\| \right) \right\|^{p_1}_{\mathrm{A}_1} d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \mathrm{C} \sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^{+\infty} \int_{\Sigma_n} r^{(\alpha_1 + j - m) p_1 + n - 1} \| \varphi^{(j)}(r) \|^{p_1}_{\mathrm{A}_1} \, dr \, d\sigma_n\left(\vec{\omega}\right) \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \mathrm{C} \, | \Sigma_n |^{\frac{1}{p_1}} \| \varphi^{(j)} \|_{\mathrm{L}^{p_1}_{\alpha_1 + j - m + \frac{n-1}{p_1}}(\mathrm{A}_1)} < +\infty .$$

La fonction u est donc élément de $\mathrm{W}^m_n(p_0, \alpha_0, \mathrm{A}_0; p_1, \alpha_1, \mathrm{A}_1)$ et le théorème 3.2 est démontré.

4. Conditions de comptabilité entre les traces sur divers sous-espaces.

4.1. Dans les numéros 2 et 3 nous avons établi des théorèmes qui permettent (entre autres) de résoudre certains problèmes du type suivant : $\mathrm{X}(\mathbf{R}^n)$ étant un espace de fonctions de n variables

réelles et Γ un sous-espace de dimension k de $\mathbf{R}^n$, déterminer l'image de $X(\mathbf{R}^n)$ par l'application

$$u \mapsto D^\alpha u|_\Gamma \tag{4.1}$$

lorsqu'elle est définie (α multi-entier). On peut poser un problème plus général : soient Γ' et Γ'' deux sous-espaces de $\mathbf{R}^n$, α' et α'' deux multi-entiers tels que $D^{\alpha'}u|_{\Gamma'}$ et $D^{\alpha''}u|_{\Gamma''}$ soient définis pour $u \in X(\mathbf{R}^n)$, déterminer l'image de $X(\mathbf{R}^n)$ par l'application

$$u \mapsto (D^{\alpha'}u|_{\Gamma'}, D^{\alpha''}u|_{\Gamma''}).$$

Si l'on connaît déjà les images $Y(\Gamma')$ et $Y(\Gamma'')$ de $X(\mathbf{R}^n)$ par les applications $u \mapsto D^{\alpha'}u|_{\Gamma'}$ et $u \mapsto D^{\alpha''}u|_{\Gamma''}$, le problème se réduit à déterminer le sous-espace de $Y(\Gamma') \times Y(\Gamma'')$ qui est l'image de $X(\mathbf{R}^n)$ par l'application (4.2).

Nous allons résoudre ce problème dans le cas où $X(\mathbf{R}^n)$ est un espace $\vec{W}{}^{r,p}(A_0, A_1)$ défini au numéro 2; pour simplifier nous supposerons que $n = 2$ et $A_0 \subset A_1$. Nous donnerons ensuite une application à l'étude des traces des espaces $\vec{W}{}^{s,p}(\mathbf{R}^n)$ (définis au chap. I n° 9), qui est utile dans l'étude de certains problèmes aux limites hypoelliptiques.

4.2. Avant d'énoncer notre résultat, rappelons quelques notations déjà utilisées au chapitre I, n° 6 : pour F espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$ on note $L^p(F)$ l'espace des fonctions définies dans $(-\infty, +\infty)$ à valeurs dans F, mesurables et de puissance p sommable pour la mesure de Lebesgue; on note $B_q^{s,p}(F)$ [resp. $W^{m,p}(F)$] l'espace $B_q^{s,E}$(resp. $W^{m,E}$) lorsqu'on prend pour E l'espace $L^p(F)$ et pour A l'opérateur $\frac{d}{dx}$(*cf.* n^{os} 5 et 6, chap. I). Nous noterons parfois ces espaces $L^p(\mathbf{R}_x; F)$, $B_q^{s,p}(\mathbf{R}_x, F)$ et $W^{m,p}(\mathbf{R}_x; F)$ lorsqu'il sera nécessaire de préciser la variable (ici x).

Nous utiliserons aussi les notations suivantes $L^p(\mathbf{R}_+; F)$ est l'espace que nous avons noté jusqu'ici $L_0^p(F)$ et $B_q^{s,p}(\mathbf{R}_+; F)$ [resp. $W^{m,p}(\mathbf{R}_+; F)$] est l'espace $B_q^{s,L}$ (resp. $W^{m,L}$) lorsqu'on prend pour E l'espace $L_+^p(F)$ et pour A l'opérateur $\frac{d}{dx}$.

Enfin nous noterons $\overset{(0)}{W}{}^{m,p}(\mathbf{R}_+; F)$ le sous-espace de $W^{m,p}(\mathbf{R}_+, F)$ formé des fonctions u telles que

$$u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(m-1)}(0) = 0.$$

Ceci posé, nous démontrerons le

THÉORÈME 4.1. — *L'application*

$$u \mapsto (\{f_j\}_{j=0}^{r_2-1}, \{g_i\}_{i=0}^{r_1-1}),$$

où

$$f_j(x) = \frac{\partial^j u}{\partial y^j}(x, 0), \qquad g_i(y) = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}(0, y)$$

est linéaire continue de $W^{(r_1,r_2),p}(A_0, A_1)$ *sur le sous-espace de*

$$\prod_{j=0}^{r_2-1} L^p\left((A_0, A_1)_{j+\frac{1}{p},\, p}\right) \cap B_p^{\frac{r_1}{r_2}\left(r_2-j-\frac{1}{p}\right),\, p}(A_1)$$

$$\times \prod_{i=0}^{r_1-1} L^p\left((A_0, A_1)_{i+\frac{1}{p},\, p}\right) \cap B_p^{\frac{r_2}{r_1}\left(r_1-i-\frac{1}{p}\right),\, p}(A_1)$$

défini par les conditions :

(i) $g_i^{(j)}(0) = f_j^{(i)}(0)$ *pour* $\frac{i}{r_1} + \frac{j}{r_2} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$,

(ii)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \| g_i^{(j)}(t^{r_1}) - f_j^{(i)}(t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \| f_j^{(i)}(t^{r_1}) - g_i^{(j)}(-t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \| g_i^{(j)}(-t^{r_1}) - f_j^{(i)}(-t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \| f_j^{(i)}(-t^{r_2}) - g_i^{(j)}(t^{r_1}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty \quad (15), \end{cases}$$

pour les couples (i, j) *tels que* $\frac{i}{r_1} + \frac{j}{r_2} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$. Rappelons que

$$\vec{W}{}^{r,p}(A_0, A_1) = W^{(r_1,r_2),p}(A_0, A_1)$$

(15) Les trois premières conditions impliquent la quatrième.

est l'espace des fonctions $u \in L^p(\mathbf{R}^2 ; A_0)$ telles que

$$\frac{\partial^{r_1} u}{\partial x^{r_1}}, \quad \frac{\partial^{r_2} u}{\partial y^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}^2 ; A_1).$$

4.3. *Démonstration du théorème* 6.1 :

a. $u \mapsto f_j$ *est linéaire continue de* $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ *sur*

$$L^p\left((A_0, A_1)_{j+\frac{1}{p}, p}\right) \cap B^{r_2\left(r_2 - j - \frac{1}{p}\right), p}(A_1).$$

Lorsqu'on considère les fonctions de $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ comme fonctions de $y > 0$ seulement, on identifie

$$W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1) \quad \text{à} \quad W^{(r_2)}(p, 0, W^{(r_1)}(p, 0, A_0 ; p, 0, A_1) ; p, 0, L^p(A_1)) \quad (16)$$

et par conséquent, $u \mapsto f_j = \left.\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|_{y=0}$ est linéaire continue de $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ sur

$$Y = (W^{(r_1)}(p, 0, A_0 ; p, 0, A_1) ; L^p(A_1))_{\theta, p}, \qquad \text{avec} \quad \theta = \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{p} + j\right).$$

Grâce à l'inclusion $A_0 \subset A_1$, nous avons

$$W^{(r_1)}(p, 0, A_0 ; p, 0, A_1) = W^{r_1, p}(A_1) \cap L^p(A_0) ;$$

en effet l'inclusion de l'espace $W^{r_1, p}(A_1) \cap L^p(A_0)$ dans $W^{(r_1)}(p, 0, A_0 ; p, 0, A_1)$ est évidente ; pour prouver l'inclusion réciproque on remarque que pour $f \in W^{(r_1)}(p, 0, A_0 ; p, 0, A_1)$ on a $f, f^{(r_1)} \in L^p(\mathbf{R} ; A_1)$ et par conséquent d'après une inégalité classique (17), on a $f \in W^{r_1, p}(A_1)$.

On a donc

$$Y = (W^{r_1, p}(A_1) \cap L^p(A_0) ; L^p(A_1))_{\theta, p}.$$

---

(16) Il est facile de voir que ce dernier espace est exactement l'espace des restrictions à $y > 0$ des fonctions de $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$.

(17) i. e. l'inégalité

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| f^{(j)}(x) \|_{A_1}^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{j, r_1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| f(x) \|_{A_1}^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}\left(1 - \frac{j}{r_1}\right)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \| f^{(r_1)}(x) \|_{A_1}^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}\left(\frac{j}{r_1}\right)}.$$

et d'après [20] ([18]), cet espace est encore

$$(W^{r_1,p}(A_1);\, L^p(A_1))_{\theta,p} \cap (L^p(A_0);\, L^p(A_1))_{\theta,p} = B_p^{\frac{r_1}{r_2}\left(r_2-j-\frac{1}{p}\right),\,p}(A_1) \cap L^p\left((A_0,\, A_1)_{j+\frac{1}{p},\,p}\right).$$

b. Nécessité de la condition (i). — On a vu au numéro 2 que $C^\infty(R^2;\, A_0) \cap W^{(r_1,r_2),p}(A_0,\, A_1)$ est dense dans $W^{(r_1,r_2),p}(A_0,\, A_1)$ et que $u \mapsto \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\,\partial y^j}(o)$ est linéaire continu de $W^{(r_1,r_2),p}(A_0,\, A_1)$ sur $(A_0,\, A_1)_{\theta,p}$ pour $\theta = \frac{i+\frac{1}{p}}{r_1} + \frac{j+\frac{1}{p}}{r_2} < 1$. Pour $u \in C^\infty(R^2;\, A_0)$ nous avons nécessairement

$$g_i^{(j)}(o) = f_j^{(i)}(o) = \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\,\partial y^j}(o);$$

cette identité reste vraie par prolongement par continuité, pour toute $u \in W^{(r_1,r_2),p}(A_0,\, A_1)$.

c. Nécessité de la condition (ii). — Il suffit de vérifier la condition

$$\int_0^{+\infty} \| g_i^{(j)}(t^{r_1}) - f_j^{(i)}(t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \tag{4.3}$$

la vérification des autres conditions étant analogue. Pour cela nous fixons i et j tels que $\frac{i}{r_1} + \frac{j}{r_2} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, et nous fixons $u \in W^{(r_1,r_2),p}(A_0,\, A_1)$. Posons $\varphi = \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\,\partial y^j}$,

$$\Phi = f_j^{(i)} = \varphi|_{y=0} \qquad \text{et} \qquad \Psi = g_i^{(j)} = \varphi|_{x=0};$$

([18]) Le théorème encore non publié, que nous utilisons est le suivant : Soit E et F un couple d'espaces de Banach avec $F \subset E$ l'injection de F dans E étant continue : Soit $t \to G(t)$ un semi-groupe fortement continu et borné dans E, et soit A son générateur infinitésimal. On suppose que pour tout $t > 0$, $G(t) \in \mathcal{L}(F, F)$ et qu'il existe une constante C telle que $\| G(t) \|_{F \to F} \leq C$ pour tout $t \geq 0$. Alors on a

$$(D_{A^m} \cap F,\, E)_{\theta,p} = (D_{A^m},\, E)_{\theta,p} \cap (F,\, E)_{\theta,p}.$$

alors

$$\Phi \in B_p^{\frac{r_1}{r_2}\left(r_2 - t - \frac{1}{p}\right) - j, p}(A_1) = B_p^{\frac{1}{p}, p}(A_1)$$

et

$$\Psi \in B_p^{\frac{r_1}{r_2}\left(r_1 - t - \frac{1}{p}\right) - j, p}(A_1) = B_p^{\frac{1}{p}, p}(A_1).$$

Nous utiliserons la fonction auxiliaire

$$u_1(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq l \leq n}} \frac{\alpha_k}{\{k+1\}^i} \frac{\beta_l}{\{l+1\}^j} u(\{k+1\}x, \{l+1\}y),$$

avec

$$m = (\lambda+1)^* \quad (19), \qquad \lambda = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \qquad n = (\mu+1)^*, \qquad \mu = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right).$$

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \alpha_k = 1, \qquad \sum_{0 \leq l \leq n} \beta_l = 1, \tag{4.4}$$

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \{k+1\}^\gamma \alpha_k = 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, m), \tag{4.5}$$

$$\sum_{0 \leq l \leq n} \{l+1\}^\gamma \beta_l = 0 \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.5}$$

Il est évident que $u_1 \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$. Nous poserons

$$\varphi_1 = \frac{\partial^{i+j} u_1}{\partial x^i \partial y^j}, \qquad \Phi_1 = \varphi_1|_{x=0}, \qquad \Psi_1 = \varphi_1|_{x=0}.$$

Pour démontrer (4.3) il suffit de vérifier :

$$\int_0^{+\infty} \| \Psi(t^{r_1}) - \Psi_1(t^{r_1}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \tag{4.6}$$

$$\int_0^{+\infty} \| \Psi_1(t^{r_1}) - \Phi_1(t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \tag{4.7}$$

$$\int_0^{+\infty} \| \Phi_1(t^{r_2}) - \Phi(t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty. \tag{4.8}$$

(19) De manière générale s^* est le plus grand entier $< s$.

Pour vérifier (4.6), il revient au même de montrer que

$$\int_0^{+\infty} \| \Psi(t) - \Psi_1(t) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty, \qquad \text{i. e. que } \Psi - \Psi_1 \in L^p_{-\frac{1}{p}}(A_1);$$

on a évidemment :

$$(\Psi - \Psi_1)(y) = \Psi(y) - \sum_{0 \le l \le n} \beta_l \Psi(\{l+1\}y) = T\Psi,$$

où T est l'opérateur $\Psi \mapsto \Psi(y) - \sum_{0 \le l \le n} \beta_l \Psi(\{l+1\}y)$. Il suffit donc de prouver que T est linéaire continu de $B_p^{\frac{1}{p}, p}(A_1)$ dans $L^p_{-\frac{1}{p}}(A_1)$.

Il est évident que T est linéaire continu de $L^p(A_1)$ dans $L^p_0(A_1)$ et de $W^{1,p}(A_1)$ dans $W^{1,p}(\mathbf{R}_+ ; A_1)$; pour $f \in W^{1,p}(A_1)$, on a $Tf(0) = 0$, donc $Tf \in L^p_{-1}(A_1)$ ([20]), et par conséquent T est linéaire continu de $W^{1,p}(A_1)$ dans $L^p_{-1}(A_1)$; par interpolation on en déduit que T est linéaire continu de

$$B_p^{\frac{1}{p}, p}(A_1) = (W^{1,p}(A_1), L^p(A_1))_{1-\frac{1}{p}, p}$$

dans

$$(L^p_{-1}(A_1), L^p_0(A_1))_{1-\frac{1}{p}, p} = L^p_{-\frac{1}{p}}(A_1).$$

La vérification de (4.8) est analogue à celle de (4.6).

Pour démontrer (4.7) on écrit

$$\begin{aligned} \Phi_1(t^{r_2}) - \Psi_1(t^{r_1}) &= [\varphi_1(t^{r_2}, 0) - \varphi_1(t^{r_2}, t^{r_1})] \\ &\quad + [\varphi_1(t^{r_2}, t^{r_1}) - \varphi_1(0, t^{r_1})] = b(t) + a(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que $a \in L^p_{-\frac{1}{p}}(A_1)$ (la vérification pour b sera analogue).

Si l'on considère u (et u_1) comme fonction de y seulement, on a (*voir* plus haut)

$$u \in W^{(r_2)}(p, 0, W^{r_1, p}(A); p, 0, L^p(A_1))$$

([20]) Écrire $Tf(y) = \int_0^y (Tf)'(y)\, dy$ et appliquer l'inégalité (9.9.10) de [7].

et par conséquent, d'après [17] on a

$$\frac{\partial^j u}{\partial y^j} \in \mathrm{L}^p\Big(\mathbf{R}_y ; (\mathrm{W}^{r_2,p}(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1); \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1))_{\frac{j}{r_2},\infty}\Big)$$
$$= \mathrm{L}^p\Big(\mathbf{R}_y ; \mathrm{B}^{r_1\left(1-\frac{j}{r_2}\right),p}_{\infty}(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1)\Big);$$

par conséquent, on a

$$\varphi = \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_y ; \mathrm{B}^{\lambda,p}_{\infty}(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1)), \qquad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right);$$

de même, on a

$$\varphi_1 \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_y ; \mathrm{B}^{\lambda,p}_{\infty}(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1)). \tag{4.9}$$

Dans la suite on distinguera deux cas selon que $\lambda^* < 1$ ou $\lambda^* \geq 1$.

Le cas $\lambda^* < 1$; on a alors $\lambda^* = 0$ et $\lambda \leq 1$ (21).

D'après le corollaire 6.2 (chap. II, § 1), les fonctions de $\mathrm{B}^{\lambda,p}(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1)$ sont Holdériennes d'exposant $\lambda - \frac{1}{p}$ à valeurs dans A_1 et

$$\max_{x,t} t^{-\left(\lambda-\frac{1}{p}\right)} \| f(x+t) - f(x) \|_{\mathrm{A}_1} \leq \mathrm{C} \| f \|_{\mathrm{B}^{\lambda,p}_{\infty}(\mathbf{R}_x ; \mathrm{A}_1)}.$$

On a donc, d'après (4.9),

$$\| \varphi_1(x+t, y) - \varphi_1(x, y) \|_{\mathrm{A}_1} \leq \mathrm{F}(y)\, t^{\lambda-\frac{1}{p}} \quad \text{p. p.}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{F} \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_y);$$

on en déduit l'estimation

$$\| a(t) \|_{\mathrm{A}_1} = \| \varphi_1(t^{r_2}, t^{r_1}) - \varphi_1(0, t^{r_1}) \|_{\mathrm{A}_1}$$
$$\leq \mathrm{F}(t^{r_1})\, t^{r_2\left(\lambda-\frac{1}{p}\right)} = \mathrm{F}(t^{r_1})\, t^{\frac{r_1}{p}},$$

d'où

$$\int_0^{+\infty} \| a(t) \|^p_{\mathrm{A}_1} \frac{dt}{t} \leq \int_0^{+\infty} t^{r_1} |\mathrm{F}(t^{r_1})|^p \frac{dt}{t} = \frac{1}{r_1} \int_0^{+\infty} |\mathrm{F}(t)|^p\, dt < +\infty,$$

et par conséquent, $a \in \mathrm{L}^p_{-\frac{1}{p}}(\mathrm{A}_1)$.

---

(21) On a évidemment $\lambda > \frac{1}{p}$.

Le cas $\lambda^* \geq 1$:

D'après la formule de Taylor on a

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{l=0}^{\lambda^*-1} \frac{x^l}{l!} \frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x^l}(0, y) + \frac{1}{(\lambda^*-1)!} \int_0^x (x-\tau)^{\lambda^*-1} \frac{\partial^{\lambda^*} \varphi_1}{\partial x^{\lambda^*}}(\tau, y)\, d\tau.$$

D'après (4.5)′ on a $\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x^l}(0, y) = 0$ pour $l = 1, 2, \ldots, \lambda^* - 1$ [22] et, par conséquent, on a

$$a(t) = \varphi_1(t^{r_2}, t^{r_1}) \qquad \varphi_1(0, t^{r_1})$$

$$= \frac{1}{(\lambda^*-1)!} \int_0^{t^{r_2}} (t^{r_2}-\tau)^{\lambda^*-1} \frac{\partial^{\lambda^*} \varphi_1}{\partial x^{\lambda^*}}(\tau, t^{r_1})\, d\tau,$$

d'où

$$\| a(t) \|_{A_1} \leq C t^{r_2(\lambda^*-1)} \int_0^{t^{r_2}} \left\| \frac{\partial^{\lambda^*} \varphi_1}{\partial x^{\lambda^*}}(\tau, t^{r_1}) \right\|_{A_1} d\tau. \tag{4.10}$$

Posons

$$w = \frac{\partial^{\lambda^*} \varphi}{\partial x^{\lambda^*}} \qquad \text{et} \qquad w_1 = \frac{\partial^{\lambda^*} \varphi_1}{\partial x^{\lambda^*}};$$

on a

$$w, w_1 \in L^p(\mathbf{R}_y; B_\infty^{\lambda-\lambda^*, p}(\mathbf{R}_x; A_1)) \tag{4.11}$$

et

$$w_1(x, y) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq l \leq n}} \{l+1\}^{\lambda^*} \alpha_k \beta_l w(\{l+1\}x, \{l+1\}y)$$

$$= \sum_{0 \leq l \leq n} \beta_l (Sw)(x, \{l+1\}y),$$

S désignant la transformation

$$f(x) \mapsto \sum_{0 \leq k \leq m} \{k+1\}^{\lambda^*} \alpha_k f(\{k+1\}x).$$

Il est évident que S est linéaire continu de $L^p(A_1)$ dans $L^p(\mathbf{R}_+; A_1)$ et de $W^{2,p}(A_1)$ dans $W^{2,p}(\mathbf{R}_+; A_1)$; pour $f \in W^{2,p}(A_1)$, on a

---

[22] $\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x_l}(0, y)$ est bien défini comme élément de $B_p^{\frac{1}{p} - \frac{r_2}{r_1} l, p}(A_1) \subset L^p(A_1)$ pour $l = 0, 1, \ldots, \lambda^* - 1$.

$(Sf)(o) = o$ et $(Sf)'(o) = o$ [23], donc $Sf \in L^{p}_{2}(A_1)$ [23]. S est donc une application linéaire continue de $L^p(A_1)$ dans $L^p_0(A_1)$ et de $W^{2,p}(A_1)$ dans $L^p_{-2}(A_1)$; par interpolation on en déduit que S est linéaire continu de

$$B^{\lambda-\lambda^*,p}_{\infty}(A_1) = (W^{2,p}(A_1);\ L^p(A_1))_{1-\frac{\lambda-\lambda^*}{2},\infty}$$

dans

$$(L^p_{-2}(A_1) \cap L^p_0(A_1);\ L^p_0(A_1))_{1-\frac{\lambda-\lambda^*}{2},\infty};$$

d'après [13] ce dernier espace est formé des fonctions $f \in L^p_0(A_1)$ telles que :

$$\left(\int_0^{\sqrt{t}} \left| e^{-\frac{t}{x^2}} - 1 \right|^p \| u(x) \|^p_{A_1} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C t^{\frac{\lambda-\lambda^*}{2}},$$

donc

$$\left(\int_0^{\sqrt{t}} \| u(x) \|^p_{A_1} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C t^{\frac{\lambda-\lambda^*}{2}}$$

car $\left| e^{-\frac{t}{x_2}} - 1 \right| \geq |e^{-1} - 1|$ pour $x < \sqrt{t}$. Ce résultat appliqué à w_1, donne grâce à (4.11) l'estimation suivante :

$$\left(\int_0^{\sqrt{t}} \| w_1(x, y) \|^p_{A_1} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq F(y)\, t^{\frac{\lambda-\lambda^*}{2}} \quad \text{p.p.} \qquad \text{avec} \quad F \in L^p;$$

on en déduit grâce à (4.10) :

$$\| a(t) \|_{A_1} \leq C t^{r_2(\lambda^*-1)} \left(\int_0^{t^{r_2}} \| w_1(\tau, t^{r_1}) \|^p_{A_1} d\tau\right)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{r_2}{p'}}$$

$$\leq C F(t^{r_1})\, t^{r_2\left(\lambda - \frac{1}{p}\right)} = C F(t^{r_1})\, t^{\frac{r_1}{p}}$$

et par conséquent, $a \in L^p_{-\frac{1}{p}}(A_1)$.

---

[23] Car $\lambda^* \geq 1$ et $\lambda^* + 1 = m$.

[24] D'après [4], on a $\{ u;\ u \in W^{2,p}(\mathbf{R}_+),\ u(o) = u'(o) = o \} \subset L^p_2$; la démonstration du cas vectoriel est analogue.

d. Les conditions (i) *et* (ii) *sont suffisantes :* On fixe une famille de fonctions $(\{f_j\}_{j=0}^{r_2-1}, \{g_i\}_{i=0}^{r_1-1})$ remplissant les conditions de l'énoncé du théorème; on doit construire une fonction $u \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ telle que

$$\frac{\partial^j u}{\partial y^j}(x, 0) = f_j(x) \qquad (j = 0, \ldots, r_2 - 1)$$

et

$$\frac{\partial^i u}{\partial x^i}(0, y) = g_i(y) \qquad (i = 0, \ldots, r_1 - 1).$$

On a par hypothèse (*voir* point *a*),

$$f_j \in T_j^{(r_2)}(p, 0, W^{(r_1)}(p, 0, A_0; p, 0, A_1); p, 0, L^p(\mathbf{R}; A_1))$$

et par conséquent, il existe

$$u_j \in W^{(r_2)}(p, 0, W^{(r_1)}(p, 0, A_0; p, 0, A_1); p, 0, L^p(A_1))$$

tel que $u_j^{(j)}(0) = f_j$ (lorsqu'on considère u_j comme fonction de y seulement); u_j est une fonction des deux variables x et y, $y \geqq 0$ telle que

$$u_j \in L^p(\mathbf{R}_+^2; A_0), \frac{\partial^{r_1} u_j}{\partial x^{r_1}}, \frac{\partial^{r_2} u_j}{\partial y^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}_+^2; A_1)$$

et telle que $\dfrac{\partial^j u_j}{\partial y^j}(x, 0) = f_j(x)$.

Par un procédé de prolongement classique on construit une fonction $\tilde{u}_j \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ telle que $\tilde{u}_j(x, y) = u_j(x, y)$ pour $y \geqq 0$ et par conséquent on a

$$\frac{\partial^j \tilde{u}_j}{\partial y^j}(x, 0) = f_j(x).$$

Si l'on pose $U_j(x, y) = \sum_{l=1}^{r_2} \alpha_l \tilde{u}_j(x, ly)$, où les nombres α_l remplissent les conditions suivantes :

$$\sum_{l=1}^{r_2} l^k \alpha_l = \delta_j^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, r_2 - 1),$$

la fonction U_j est élément de $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ et

$$\frac{\partial^i U_j}{\partial y^i}(x, 0) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, r_2 - 1),$$

$$\frac{\partial^j U_j}{\partial y^j}(x, 0) = f_j(x).$$

On pose enfin $U(x, y) = \sum_{j=0}^{r_2 - 1} U_j(x, y)$, on a alors

$$U \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$$

et

$$\frac{\partial^j U}{\partial y^j}(x, 0) = f_j(x) \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1).$$

On va chercher la fonction u sous la forme $u = U + V$; la fonction V devra remplir les conditions suivantes :

$$V \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1),$$

$$\frac{\partial^j V}{\partial y^j}(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1),$$

$$\frac{\partial^i V}{\partial x^i}(0, y) = k_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r_2 - 1),$$

avec

$$k_i = g_i - h_i, \qquad h_i(y) = \frac{\partial^i U}{\partial x^i}(0, y) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r_1 - 1).$$

On peut appliquer les résultats des points a, b, c à la fonction U qui est élément de $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$; on a donc

$$h_i \in L^p\left((A_0, A_1)_{i + \frac{1}{p}, p}\right) \cap B_p^{\frac{r_2}{r_1}\left(r_1 - i - \frac{1}{p}\right), p}(A_1),$$

$$h_i^{(j)}(0) = f_j^{(i)}(0) \qquad \text{pour} \quad \frac{i}{r_1} + \frac{j}{r_2} < 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

$$\int_0^{+\infty} \| h_i^{(j)}(t^{r_1}) - f_j^{(i)}(t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} \| h_i^{(j)}(-t^{r_1}) - f_j^{(i)}(-t^{r_2}) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty$$

pour

$$\frac{i}{r_1} + \frac{j}{r_2} = 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Par hypothèse, des conditions analogues sont remplies par les fonctions g_i, on a donc

$$k_i \in \mathrm{L}^p\left((\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1)_{\frac{i+\frac{1}{p}}{r_1}, p}\right) \cap \mathrm{B}_p^{\frac{r_2}{r_1}\left(r_1 - i - \frac{1}{p}\right), p}(\mathrm{A}_1),$$

$$k_i^{(j)}(0) = 0 \qquad \text{pour} \quad j < \frac{r_2}{r_1}\left(r_1 - i - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}$$

$$\int_0^{+\infty} \| k_i^{(j)}(t) \|_{\mathrm{A}_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \| k_i^{(j)}(-t) \|_{\mathrm{A}_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty$$

pour

$$j = \frac{r_2}{r_1}\left(r_1 - i - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} \qquad (i = 0, 1, \ldots, r_1 - 1).$$

Nous admettons provisoirement le

LEMME 4.1. — $\left(\overset{(0)}{\mathrm{W}}{}^{m,p}(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_1); \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_1)\right)_{1-\frac{\mathrm{S}}{m}, p}$ *est le sous-espace de* $\mathrm{B}^{\mathrm{S},p}(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_1)$ *formé des fonctions* Φ *telles que*

$$\Phi^{(j)}(0) = 0 \qquad \text{pour} \quad j < \mathrm{S} - \frac{1}{p}$$

et

$$\int_0^{+\infty} \| \Phi^{(j)}(t) \|_{\mathrm{A}_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty \qquad \text{pour} \quad j = \mathrm{S} - \frac{1}{p}.$$

D'après ce lemme, on a

$$k_i(t), k_i(-t) \in \mathrm{T}_i^{(r_1)}\left(p, 0, \overset{(0)}{\mathrm{W}}{}^{r_2,p}(\mathrm{R}_+; \mathrm{A}_1); p, 0, \mathrm{L}^p(\mathrm{R}_+; \mathrm{A}_1)\right).$$

On a aussi

$$k_i(t), k_i(-t) \in \mathrm{T}_i^{(r_1)}(p, 0, \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_0); p, 0, \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_1))$$

et par conséquent en utilisant [20] ([25]) on a

$$k_i(t), k_i(-t) \in \mathrm{T}_i^{r_1)}\left(p, 0, \overset{(0}{\mathrm{W}}{}^{r_2,p}(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_1) \cap \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_0); p, 0, \mathrm{L}^p(\mathbf{R}_+; \mathrm{A}_1)\right).$$

([25]) L'énoncé du théorème utilisé est rappelé page 264.

De ces inclusions on déduit l'existence des fonctions $\varphi_i^+(x, y)$ définie pour $x > 0$, $y > 0$ et $\varphi_i^-(x, y)$ définie pour $x > 0$, $y < 0$ et telles que

$$(4.12) \qquad \varphi_i^+ \in L^p(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+; A_0); \qquad \frac{\partial^{r_1}\varphi_i^+}{\partial x^{r_1}}, \frac{\partial^{r_2}\varphi_i^+}{\partial y^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+; A_1),$$

$$(4.13) \qquad \frac{\partial^j \varphi_i^+}{\partial x^j}(0, y) = k_i(y), \qquad y > 0,$$

$$(4.14) \qquad \frac{\partial^j \varphi_i^+}{\partial y^j}(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1),$$

$$(4.15) \qquad \varphi_i^- \in L^p(\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-; A_0); \qquad \frac{\partial^{r_1}\varphi_i^-}{\partial x^{r_1}}, \frac{\partial^{r_2}\varphi_i^-}{\partial y^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}_- \times \mathbf{R}_-; A_1),$$

$$(4.16) \qquad \frac{\partial^j \varphi_i^-}{\partial x^j}(0, y) = k_i(y), \qquad y < 0,$$

$$(4.17) \qquad \frac{\partial^j \varphi_i^-}{\partial y^j}(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1).$$

Les conditions (4.12), (4.14), (4.15), (4.17) permettent de poser

$$\varphi_i(x, y) = \begin{cases} \varphi_i^+(x, y) & \text{pour } x > 0, y > 0, \\ \varphi_i^-(x, y) & \text{pour } x > 0, y < 0, \end{cases}$$

la fonction φ_i a les propriétés suivantes :

$$\varphi_i \in L^p(\mathbf{R}_+^2; A_0); \qquad \frac{\partial^{r_1}\varphi_i}{\partial x^{r_1}}, \quad \frac{\partial^{r_2}\varphi_i}{\partial y^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}_+^2; A_1) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^j \varphi_i}{\partial x^j}(0, y) = k_i(y),$$

$$\frac{\partial^j \varphi_i}{\partial y^j}(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1).$$

Suivant un procédé classique nous posons

$$\tilde{\varphi}_i(x, y) = \begin{cases} \varphi_i(x, y) & (x > 0), \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r_1} \beta_l \varphi_i\left(-\frac{x}{l}, y\right) & (x < 0), \end{cases}$$

les nombres β_l étant solutions du système

$$\sum_{l=1}^{r_1} \beta_l \left(-\frac{1}{l}\right)^\chi = 1 \qquad (\chi = 0, 1, \ldots, r_1 - 1);$$

il est évident que $\tilde{\varphi}_i \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$,

$$\frac{\partial^j \tilde{\varphi}_i}{\partial x^j}(0, y) = k_i(y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^j \tilde{\varphi}_i}{\partial y_j}(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1);$$

on pose enfin

$$V_i(x, y) = \sum_{l=1}^{r_1} \gamma_l \tilde{v}_i(lx, y),$$

avec

$$\sum_{l=1}^{r_1} l^\chi \gamma_l = \delta_i^\chi \qquad (\chi = 0, 1, \ldots, r_1 - 1);$$

on a alors $V_i \in W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$,

$$\frac{\partial^i V_i}{\partial x^i}(0, y) = k_i(y), \qquad \frac{\partial^\chi V_i}{\partial x^\chi}(0, y) = 0 \qquad (\chi = 0, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r_1 - 1),$$

$$\frac{\partial^j V_i}{\partial y^j}(x, 0) = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r_2 - 1);$$

la fonction $V = \sum_{i=1}^{r_1 - 1} V_i$ est la fonction cherchée.

Le théorème est démontré sous réserve de vérifier le lemme 4.1.

4.4. *Démonstration du lemme* 4.1 :

Nous posons $E = L^p(R_+; A_1)$ et pour $u \in E$,

$$G(t)\, u(x) = \begin{cases} u(x - t) & (x > t), \\ 0 & (x < t), \end{cases}$$

alors $G(t)$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs dans E; son générateur infinitésimal est l'opérateur $A = -\frac{\partial}{\partial x}$ avec $D(A^m) = \overset{(0)}{W}{}^{m, p}(R_+; A_1)$; par conséquent, on peut appliquer [13] pour déterminer

$$\left(\overset{(0)}{W}{}^{m, p}(R_+; A_1);\, L^p(R_+; A_1)\right)_{1 - \frac{s}{m}, p} = (D(A^m), E)_{1 - \frac{s}{m}, p}.$$

Nous distinguerons deux cas selon que S est entier ou non :

Le cas S *non entier :* Supposons $k < S < k + 1$, k entier; d'après [13], $(D(A^m), E)_{1 - \frac{s}{m}, p}$ est le sous-espace de

$$D(A^k) = \overset{(0)}{W}{}^{k, p}(R_+; A_1)$$

formé des éléments u tels que

$$A^k u \in (D(A), E)_{1-1-S,p}.$$

Ce dernier espace est, d'après [13] (26), le sous-espace de $B_p^{S-k,p}(R_-;A_1)$ formé des fonctions Φ telles que $\Phi(0)=0$ lorsque $S-k>\frac{1}{p}$ et telles que $\int_0^{-\infty} \| \Phi(t) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty$ lorsque $S-k=\frac{1}{p}$; par conséquent, $(D(A^m), E)_{1-\frac{S}{m},p}$ est le sous-espace de $B_p^{S,p}(R_-;A_1)$ formé des fonctions u telles que

$$u^{(j)}(0)=0 \qquad \text{pour} \quad j<S-\frac{1}{p}$$

et

$$\int_0^{-\infty} \| u^{(j)}(t) \|_{A_1}^p \frac{dt}{t} < +\infty \qquad \text{pour} \quad j=S-\frac{1}{p}.$$

Le cas S *entier :* D'après [13], $(D(A^m), E)_{1-\frac{S}{m},p}$ est alors le sous-espace de $D(A^{S-1})$ formé des u tels que $A^{S-1}u \in (D(A^2), E)_{1-\frac{1}{2},p}$; ce dernier espace est, toujours d'après [13], l'espace des $v \in E = L^p(\mathbf{R}_+;A_1)$ tels que

$$\int_0^{-\infty} \int_0^{-\infty} t^{-1-p} \| \tilde{v}(x-2t) - 2\tilde{v}(x-t) + \tilde{v}(x) \|_{A_1}^p \, dx \, dt < +\infty,$$

où $\tilde{v}$ désigne le prolongement de v par zéro pour les valeurs négatives de la variable. Pour démontrer le lemme il nous faut vérifier que cet espace est encore le sous-espace de $B_p^{1,p}(\mathbf{R}_-;A_1)$ formé des v telles que $v(0)=0$. Il est évident que si $v \in (D(A^2), E)_{1-\frac{1}{2},p}$ on a

$$v \in B_p^{1,p}(\mathbf{R}_-;A_1) \qquad \text{et} \qquad v(0)=0,$$

car on a

$$D(A^2) \subset W^{2,p}(\mathbf{R}_-;A_1)$$

et

$$(D(A^2), E)_{1-\frac{1}{2},p} \subset (D(A), E)_{\theta,p} \qquad \text{pour} \quad 0<\theta<1-\frac{1}{p},$$

(26) A vrai dire ce résultat n'est démontré dans [13] que dans le cas des fonctions scalaires, la démonstration du cas vectoriel est analogue.

et les fonctions de ce dernier espace s'annulent à l'origine comme nous l'avons déjà vérifié. Réciproquement considérons $\varphi \in B_p^{1,p}(\mathbf{R}_+; A_1)$ tel que $\varphi(0) = 0$; alors

$$\varphi \in (B_p^{1-\varepsilon,p}(\mathbf{R}_+; A_1); B_p^{\varepsilon,p}(\mathbf{R}_+; A_1))_{\varepsilon,p} \qquad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon < 1$$

et, d'après [4], on a

$$\varphi \in (W_{-\varepsilon}^{1,p}(\mathbf{R}_+; A_1); L_{-\varepsilon}^p(\mathbf{R}_+; A_1))_{\varepsilon,p}$$

et comme $\varphi(0) = 0$, on a toujours d'après [4],

$$\varphi \in \left(\overset{(0)}{W}{}_{-\varepsilon}^{1,p}(\mathbf{R}_+; A_1); L_{-\varepsilon}^p(\mathbf{R}_+; A_1)\right)_{\varepsilon,p} \subset L_{-\varepsilon-1}^p(A_1), L_{-\varepsilon}^p(A_1))_{\varepsilon,p} = L_{-1}^p(A_1).$$

De l'inégalité

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{-1-p} \| \tilde{\varphi}(x-2t) - 2\tilde{\varphi}(x-t) + \tilde{\varphi}(x) \|_{A_1}^p \, dx\, dt$$
$$\leq \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{-1-p} \| \varphi(x) - 2\varphi(x+t) + \varphi(x+2t) \|_{A_1}^p \, dx\, dt$$
$$+ C \int_0^{+\infty} \| x^{-1}\varphi(x) \|_{A_1}^p \, dx$$

résulte alors que $\varphi \in (D(A^2), E)_{1-\frac{1}{2},p}$. On a donc prouvé que $(D(A^m), E)_{1-\frac{s}{m},p}$ est le sous-espace de $B_p^{s,p}(\mathbf{R}_+; A_1)$ formé des u telles que $u(0) = \ldots = u^{(s-1)}(0) = 0$.

C. Q. F. D.

Nous donnons à présent une application du théorème 4.1, utile pour l'étude du problème de Dirichlet pour certains opérateurs hypoelliptiques.

Prenons

$$A_1 = L^p(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1}),$$
$$A_0 = W^{\vec{S},p}(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1}),$$

avec

$$\vec{S} = \Big(\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{m-1}; \underbrace{r_2, \ldots, r_2}_{n-1}\Big);$$

si nous notons $(x_1, \ldots, x_{m-1}; y_1, \ldots, y_{n-1})$ le point générique de $\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1}$, A_0 est l'espace des $u \in L^p(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1})$ telles que

$$\frac{\partial^{r_1} u}{\partial x_i^{r_1}} \in L^p(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

et que

$$\frac{\partial^{r_2} u}{\partial y_j^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Alors $W^{(r_1, r_2), p}(A_0, A_1)$ s'identifie à l'espace $W^{\vec{\sigma}, p}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$ avec

$$\vec{\sigma} = \left(\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{m}; \underbrace{r_2, \ldots, r_2}_{n} \right);$$

si nous notons $(\xi_1, \ldots, \xi_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ le point générique de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$, $W^{\vec{\sigma}, p}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$ est l'espace des $u \in L^p(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n)$ telles que

$$\frac{\partial^{r_1} u}{\partial \xi_i^{r_1}} \in L^p(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$\frac{\partial^{r_2} u}{\partial \zeta_j^{r_2}} \in L^p(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après le numéro 9 du chapitre I on a

$$(A_0, A_1)_{\theta, p} = B_p^{\theta, \vec{\sigma}}(\mathbf{R}^{m-1} \times \mathbf{R}^{n-1})$$

et, par conséquent,

$$L^p\left(\mathbf{R}; (A_0, A_1)_{j+\frac{1}{p}, p}\right) \cap B_p^{\frac{r_1}{r_2}\left(r_2 - j - \frac{1}{p}\right), p}(\mathbf{R}; A_1)$$

s'identifie à

$$B_p^{\frac{r_2 - j - \frac{1}{p}}{r_2} \vec{\sigma}_1}(\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-1}), \qquad \text{avec} \quad \vec{\sigma}_1 = \left(\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{m}; \underbrace{r_2, \ldots, r_2}_{n-1} \right).$$

De même

$$L^p\left(\mathbf{R}; (A_0, A_1)_{i+\frac{1}{p}, p}\right) \cap B_p^{\frac{r_2}{r_1}\left(r_1 - i - \frac{1}{p}\right), p}(\mathbf{R}; A_1)$$

s'identifie à

$$B_p^{\frac{r_1-i-\frac{1}{p}}{r_1}\overset{\rightarrow}{\sigma}_2}(\mathbf{R}^{m-1}\times\mathbf{R}^n), \qquad \text{avec} \quad \overset{\rightarrow}{\sigma}_2=\Big(\underbrace{r_1,\ldots,r_1}_{m-1};\underbrace{r_2,\ldots,r_2}_{n}\Big).$$

De ce qui précède on déduit facilement (par prolongement, avec des notations évidentes) le :

Théorème 4.2. — *L'application*

$$u\to\big((f_j)_{j=0}^{r_2-1};(g_i)_{i=0}^{r_1-1}\big),$$

où

$$f_j(\xi_1,\ldots,\xi_m;\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1})=\frac{\partial^j u}{\partial\zeta_n^j}(\xi_1,\ldots,\xi_m;\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},0)$$

et

$$g_i(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1};\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=\frac{\partial^i u}{\partial\xi_m^i}(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1},0;\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$$

est linéaire continue de $W^{\overset{\rightarrow}{\sigma},p}(\mathbf{R}^m_+\times\mathbf{R}^n_+)$ *sur le sous-espace de*

$$\prod_{j=0}^{r_2-1}B_p^{\frac{r_2-j-\frac{1}{p}}{r_2}\overset{\rightarrow}{\sigma}_1}(\mathbf{R}^m_+\times\mathbf{R}^{n-1})\times\prod_{i=0}^{r_1-1}B_p^{\frac{r_1-i-\frac{1}{p}}{r_1}\overset{\rightarrow}{\sigma}_2}(\mathbf{R}^{m-1}\times\mathbf{R}^n_+),$$

défini par les conditions :

(i) $$\frac{\partial^j g_i}{\partial\zeta_n^j}(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1};\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},0)=\frac{\partial^i f_j}{\partial\xi_m^i}(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1},0;\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1})$$

pour

$$\frac{i}{r_1}+\frac{j}{r_2}<1-\frac{1}{p}\Big(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Big);$$

(ii) $$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbf{R}^{m-1}\times\mathbf{R}^{n-1}}\left|\frac{\partial^j g_i}{\partial\zeta_n^j}(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1};\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1},t^{r_1})-\frac{\partial^i f_j}{\partial\xi_m^i}(\xi_1,\ldots,\xi_{m-1},t^{r_2};\zeta_1,\ldots,\zeta_{n-1})\right|^p d\xi_1\ldots d\xi_{m-1}\,d\zeta_1\ldots d\zeta_{n-1}\,\frac{dt}{t}<+\infty$$

pour

$$\frac{i}{r_1}+\frac{j}{r_2}=1-\frac{1}{p}\Big(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Big).$$

Par cartes locales on peut déduire de ce théorème la caractérisation des traces des espaces $W^{\vec{\sigma},p}(\Omega_m \times \Omega_n)$, où Ω_m (resp. Ω_n) est un ouvert borné de $\mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{R}^n$) de frontière Γ_m (resp. Γ_n), variété indéfiniment dérivable de dimension $m-1$ (resp. $n-1$), Ω_m (resp. Ω_n) étant d'un seul côté de Γ_m (resp. Γ_n); de tels espaces sont utilisés dans [26] pour l'étude de certains problèmes aux limites hypoelliptiques. On peut aussi en utilisant le théorème 6.2 caractériser les traces des espaces $W^{\vec{\sigma},p}(\mathbf{R}_+ \times \Omega_n)$ et $W^{\vec{\sigma},p}([0,T] \times \Omega_n)$; ces espaces interviennent naturellement dans l'étude de certains problèmes aux limites paraboliques, *cf.* par exemple [30].

APPENDICE I.

Nous allons vérifier que pour $S > 0$ non entier on a l'identité $B^{S,\infty}_{\infty} = C^S$; C^S désignant l'espace des fonctions u dont les dérivées d'ordre $\leq [S]$ sont continues et bornées, la dérivée d'ordre $[S]$ étant uniformément Holdérienne d'exposant $S-[S]$:

$$\max_{x,y \in \mathbf{R}} \frac{|u^{([S])}(x) - u^{([S])}(y)|}{|x-y|^{S-[S]}} < +\infty.$$

D'après le chapitre I, n° 5, remarque 5.1, il revient au même de démontrer l'identité

$$(W^{m+1,\infty}, W^{m,\infty})_{\theta,\infty} = C^{m+1-\theta}$$

pour m entier ≥ 0, $0 < \theta < 1$.

Ce résultat est un cas particulier d'un fait plus général : Soient E un espace de Banach et A un opérateur fermé de domaine D_A dans E; on suppose que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe

$$t \mapsto G(t)$$

continu et borné d'opérateurs dans E. On sait qu'alors A vérifie l'hypothèse (H'). L'adjoint $G^*(t)$ de $G(t)$ dans l'antidual E^* de E est un semi-groupe faiblement continu et borné d'opérateurs

dans $E^\star$, dont le « générateur infinitésimal faible » ([27]) est $A^\star$ adjoint (au sens des opérateurs non bornés) de A. Il est évident que $A^\star$ vérifie l'hypothèse (H′) (de la remarque 3.1) et, par conséquent, on peut appliquer à cet opérateur les résultats du numéro 3. Dans l'exemple qui nous intéresse nous prendrons $E = L^1(\mathbf{R})$, $A = \frac{d}{dx}$, donc $E^\star = L^\infty(\mathbf{R})$.

Ceci posé on a le

LEMME A.1. — *Pour* $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$ $(D_{A^\star}, E^\star)_{\theta,p}$ *est le sous-espace de* $E^\star$ *formé des* $a^\star$ *tels que*

$$t^{-(1-\theta)} \| G^\star(t)\, a^\star - a^\star \|_E \in L^p_\star. \tag{A.1}$$ ([28])

Démonstration. — D'après le théorème 3.1 nous savons que $a^\star \in (D_{A^\star}, E^\star)_{\theta,p}$ si et seulement si

$$\lambda^{(1-\theta)}\, A^\star (-A^\star + \lambda)^{-1} a^\star \in L^p_\star(E^\star). \tag{A.2}$$

Nous devons vérifier que (A.1) implique (A.2); pour cela nous utiliserons l'identité

$$(a,\ (-A^\star + \lambda)^{-1} a^\star) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (a,\ G^\star(t)\, a^\star)\, dt,$$

d'où

$$\begin{aligned}(a,\ A^\star(-A^\star + \lambda)^{-1} a^\star) &= (a,\ \lambda(-A^\star + \lambda)^{-1} a^\star - a^\star) \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (a,\ G^\star(t)\, a^\star)\, dt - (a,\ a^\star) \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (a,\ G^\star(t)\, a^\star - a^\star)\, dt;\end{aligned}$$

([27]) C'est-à-dire que $D_{A^\star}$ est le sous-espace des $a^\star \in E^\star$ tels que $t \mapsto (a, G^\star(t)a^\star)$ soit continûment dérivable pour tout $a \in E$; pour un tel $a^\star$, $A^\star a^\star$ est défini par l'identité

$$(a,\ A^\star a^\star) = \lim_{t \to 0} t^{-1} (a,\ G^\star(t) a^\star - a^\star) \quad \text{pour tout } a \in E.$$

([28]) L'énoncé a bien un sens, car la fonction $t \mapsto \| G^\star(t)a^\star - a^\star \|_{E^\star}$ qui est l'enveloppe supérieure des fonctions continues

$$t \mapsto (G(t)\, a - a,\ a^\star), \qquad \text{avec } \| a \|_E \leq 1,$$

est semi-continue inférieurement, donc mesurable.

on a donc

$$\| A^*(-A^*+\lambda)^{-1}a^* \|_{E^*} \leq \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| G^*(t)\,a^* - a^* \|_{E^*}\, dt$$

où, posant $\mu = \lambda^{-1}$,

$$\mu \left\| A^*\left(-A^*+\frac{1}{\mu}\right)^{-1} a^* \right\|_{E^*} \leq \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\mu}t} \| G^*(t)\,a^* - a^* \|_{E^*} \frac{dt}{t}.$$

Considérons cette dernière intégrale comme un produit de composition sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+$, pour la mesure (de Haar) $\frac{dt}{t}$; nous obtenons alors l'inégalité

$$\left\{ \int_0^\infty \left(\mu^{\theta-1} \left\| A^*\left(-A^*+\frac{1}{\mu}\right)^{-1} a^* \right\|_{E^*} \right)^p \frac{d\mu}{\mu} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{ \int_0^{+\infty} t^{\theta-2} e^{-\frac{1}{t}} \frac{dt}{t} \right\} \left\{ \int_0^{+\infty} (t^{\theta-1} \| G^*(t)\,a^* - a^* \|_{E^*})^p \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Si (A.1) a lieu, le terme de droite de cette inégalité est fini, et par conséquent le premier membre qui s'écrit encore

$$\left\{ \int_0^{+\infty} (\lambda^{1-\theta} \| A^*(-A^*+\lambda)^{-1}a^* \|_{E^*})^p \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

est fini et par conséquent (A.2) a lieu.

Réciproquement nous ne prouverons pas directement que (A.2) implique (A.1); nous montrerons seulement que lorsque $a^* \in (D_{A^*}, E^*)_{\theta,p}$, alors (A.1) a lieu, ce qui d'après le théorème 3.1 revient au même. Par définition, si $a^* \in (D_{A^*}, E^*)_{\theta,p}$, on peut écrire

$$a^* = u(t) + v(t), \qquad \text{avec} \quad t^\theta u(t) \in L^p_*(D_{A^*}), \quad t^{\theta-1} v(t) \in L^p_*(E^*);$$

d'où

$$G^*(t)\,a^* - a^* = (G^*(t)-1)\,u(t) + (G^*(t)-1)\,v(t)$$

et le résultat suit car on a

$$\| (G^*(t)-1)\,v(t) \|_{E^*} \leq (M+1) \| v(t) \|_{E^*} \qquad \left(\text{avec } M = \max_{t>0} \| G(t) \|_{E\to E}\right)$$

et

$$\| (G^*(t)-1)\,u(t) \|_{E^*} \leq Mt \| A^* u(t) \|_{E^*};$$

cette dernière inégalité résulte de l'inégalité plus générale suivante : Pour $x^* \in D_{A^*}$, on a

$$\| G^*(t)x^* - x^* \|_{E^*} \leq Mt \| A^* x^* \|_{E^*};$$

pour le voir on écrit

$$(a, G^*(t)x^* - x^*) = (G(t)a - a, x^*)$$
$$= \left(\int_0^t G(S) A a \, dS, x^* \right) = \int_0^t (G(S)a, A^* x^*) \, dS$$

pour $a \in D_A$; cette identité reste vraie par prolongement par continuité pour $a \in E$ et, par conséquent, on a

$$| (a, (G^*(t) - 1)x^*) | \leq Mt \| A^* x^* \|_{E^*} \| a \|_E,$$

d'où

$$\| (G^*(t) - 1)x^* \|_{E^*} \leq Mt \| A^* x^* \|_{E^*}.$$

Le lemme A.1 est complètement démontré.

Remarque A.1. — On peut évidemment donner des caractérisations analogues pour $(D_{A^*}m, E^*)_{0,p}$; ceci a été développé dans [6].

APPENDICE II.

Les lemmes 10.1′ et 10.2 du chapitre I résultent du corollaire 6.2 du chapitre II, § 1, n° 6 et du

Lemme A.2. — *Pour* $1 < p < +\infty$, *on a l'inclusion* $B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n) \subset L^{\Phi_p}(\mathbf{R}^n)$, *avec*

$$\Phi_p(x) = \sum_{k \geq p} \frac{x^k}{k!} = e^x - \sum_{k < p} \frac{x^k}{k!}.$$

Démonstration. — On commence par le cas de la dimension $n = 1$: Fixons $u \in B_\infty^{\frac{1}{p},p}(\mathbf{R})$, nous avons

$$C_0 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | u(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

$$C_1 = \max_{t>0} t^{-\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | u(x+t) - u(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Nous devons montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(\lambda |u(x)|)\, dx \leq 1,$$

i. e. que

$$\sum_{k \geq p} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^k\, dx \leq 1$$

(et vérifier que λ^{-1} dépend continûment de C_0 et C_1, i. e. tend vers zéro lorsque C_0 et C_1 tendent vers zéro).

Pour vérifier (A.3), il faut en particulier voir que $u \in L^k(\mathbf{R}) = L^k$ et majorer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^k\, dx$$

lorsque $k \to +\infty$.

Pour cela nous utiliserons une « formule de représentation » pour u, qui est due à [9] :

Pour tout $t > 0$, on a

$$u(x) = \frac{1}{t}\int_0^t u(x+S)\, dS - \int_0^t \frac{dS}{S^2}\int_0^S [u(x+S) - u(x+\sigma)]\, d\sigma.$$

Par un changement de variables on a aussi

$$u(x) = \frac{1}{t}\int_0^t u(x+S)\, dS - \int_0^t d\sigma \int_0^{t-\sigma} [u(x+\sigma+S) - u(x+\sigma)] \frac{dS}{(S+\sigma)^2}$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t u(x+S)\, dS - \int_0^t d\sigma \int_0^{t-\sigma} \Delta_S u(x+\sigma)\, \frac{dS}{(S+\sigma)^2},$$

où $\Delta_S u(y) = u(y+S) - u(y)$. En changeant l'ordre des intégrations, on a donc

$$u(x) = \frac{1}{t}\int_0^t u(x+S)\, dS - \int_0^t dS \int_0^{t-S} \frac{1}{(S+\sigma)^2} \Delta_S u(x+\sigma)\, d\sigma;$$

posons (pour $t > 0$ fixé)

$$f(S) = \frac{1}{t} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq S \leq t, \qquad \text{zéro ailleurs,}$$

$$g_S(\sigma) = \frac{1}{(S+\sigma)^2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \sigma \leq t - S, \text{ zéro ailleurs,}$$

on a alors

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(S)\, u(x+S)\, dS - \int_0^t dS \int_{-\infty}^{+\infty} g_S(\sigma)\, \Delta_S u(x-\sigma)\, d\sigma$$
$$= (\check{f} \star u)(x) - \int_0^t dS\, (\check{g}_S \star \Delta_S u)(x).$$

Pour $q > p$, on définit r en posant $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1$; alors de l'identité précédente, on déduit à l'aide de l'inégalité de Young la majoration suivante :

$$\| u \|_{L^q} \leq \| f \|_{L^r} \| u \|_{L^p} + \int_0^t \| g_S \|_{L^r} \| \Delta_S u \|_{L^p}\, dS.$$

d'où

$$\| u \|_{L^q} \leq \| f \|_{L^r} C_0 + \left(\int_0^t \| g_S \|_{L^r} S^{\frac{1}{p}} dS \right) . C_1. \tag{A.4}$$

On a évidemment

$$\| f \|_{L^r} = \frac{1}{t} \left(\int_0^t dS \right)^{\frac{1}{r}} = t^{\frac{1}{r}-1} = t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}},$$

puis

$$\| g_S \|_{L^r} = \left(\int_0^{t-S} \frac{d\sigma}{(S+\sigma)^{2r}} \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^t \sigma^{-2r}\, d\sigma \right)^{\frac{1}{r}},$$

d'où

$$\| g_S \|_{L^r} = \left(\frac{S^{1-2r} - t^{1-2r}}{2r-1} \right)^{\frac{1}{r}}$$

et

$$\int_0^t \| g_S \|_{L^r} S^{\frac{1}{p}} dS = \frac{1}{(2r-1)^{\frac{1}{r}}} \int_0^t S^{\frac{1}{p}} (S^{1-2r} - t^{1-2r})^{\frac{1}{r}} dS$$
$$= \frac{t^{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-1}}{(2r-1)^{\frac{1}{r}}} \int_0^1 S^{\frac{1}{p}} (S^{1-2r} - 1)^{\frac{1}{r}} dS$$
$$\leq \frac{t^{\frac{1}{q}}}{(2r-1)^{\frac{1}{r}}} \int_0^1 S^{\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-2} dS = \frac{t^{\frac{1}{q}}}{(2r-1)^{\frac{1}{r}}} \int_0^1 S^{\frac{1}{q}-1} dS$$
$$= q\, t^{\frac{1}{q}} \frac{1}{(2r-1)^{\frac{1}{r}}} \leq q\, t^{\frac{1}{q}}.$$

De (A.4) on déduit donc la majoration [29]

$$\| u \|_{L^q} \leq t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} C_0 + q\, t^{\frac{1}{q}} C_1 \tag{A.5}$$

pour tout $t > 0$; en prenant le minimum en t du terme de droite on obtient

$$\| u \|_{L^q} \leq 2\,(q C_1)^{1-\frac{1}{q}} C_0^{\frac{p}{q}} \tag{A.6}$$

pour $p < q < +\infty$.

De (A.6) on déduit la majoration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | u(x) |^k \, dx \leq 2^k (k C_1)^{k-p} C_0^p$$

pour tout entier $k \geq p$, et

$$\sum_{k \geq p} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} | u(x) |^k \, dx \leq \sum_{k \geq p} \frac{(2\lambda)^k}{k!} (k C_1)^{k-p} C_0^p$$
$$= \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^p \sum_{k \geq p} \frac{(2\lambda C_1)^k k^{k-p}}{k!}.$$

On a une série de terme général $u_k = \dfrac{(2\lambda C_1)^k . k^{k-p}}{k!}$, on a donc

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = (2\lambda C_1) \frac{1}{k+1} \frac{(k+1)^{k+1-p}}{k^{k-p}},$$

d'où

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = (2\lambda C_1) \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-p} = \frac{(2\lambda C_1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^p} \leq (2\lambda C_1)\, e.$$

Soit k_0 le plus petit entier $\geq p$, on a donc

$$u_{k_0+l} \leq (2\lambda C_1 e)^l u_{k_0} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \geq p} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} | u(x) |^k \, dx \leq \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^p u_{k_0} \sum_{l \geq 0} (2\lambda C_1 e)^l.$$

---

[29] Une inégalité voisine de celle-ci est démontrée dans [9], à partir de la même « formule de représentation », mais sans utiliser l'inégalité de Young.

En conclusion, pour $\lambda < \frac{1}{2C_1 e}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(\lambda \mid u(x) \mid) \, dx \leq \left(\frac{C_0}{C_1}\right)^p \frac{(2\lambda C_1)^{k_0} k_0^{k_0-p}}{k_0!} \frac{1}{1-2\lambda C_1 e};$$

il est évident que pour λ assez petit on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(\lambda \mid u(x) \mid) \, dx \leq 1$$

et, par conséquent, $u \in L^{\Phi_p}$; plus précisément, si l'on prend

$$\lambda \leq \frac{1}{4C_1 e} \quad \text{et} \quad \lambda \leq \frac{1}{2} \sqrt[k_0]{\frac{k_0!}{2C_0^p C_1^{k_0-p} k_0^{k_0-p}}},$$

alors on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_p(\lambda \mid u(x) \mid) \, dx \leq 1$, ce qui prouve l'inégalité

$$\| u \|_{L^{\Phi_p}} \leq 4eC_1 + 2 \sqrt[k_0]{\frac{2C_0^p C_1^{k_0-p} k_0^{k_0-p}}{k_0!}}$$

et, par conséquent, l'injection de $B_\infty^{\frac{1}{p},p}(\mathbf{R})$ dans $L^{\Phi_p}(\mathbf{R})$ est continue.

Le lemme est prouvé en dimension $n = 1$.

Plaçons-nous à présent dans le cas de la *dimension* $n > 1$.

On sait d'après les résultats du chapitre II, § 1 que l'application

$$u \mapsto u \mid_X,$$

où X est un sous-espace vectoriel de dimension 1 dans $\mathbf{R}^n$, est linéaire continue de

$$B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n) \quad \text{sur} \quad B_\infty^{\frac{1}{p},p}(X);$$

on a donc l'inégalité

$$\| u \mid_X \|_{B_\infty^{\frac{1}{p},p}(X)} \leq C_X \| u \|_{B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)}$$

et comme l'espace $B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)$ est invariant par translations et rotations, la constante C_X ne dépend pas de X. Utilisant le résultat du lemme A.2 en dimension un, on en déduit qu'il existe une constante C indépendante de X telle que

$$\| u \mid_X \|_{L^{\Psi_p}(X)} \leq C \| u \|_{B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)}$$

et en particulier il existe $\lambda > 0 \left(\lambda^{-1} < C \| u \|_{B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)}\right.$ tel que$\left.\right)$

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} | u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) |^k \, dx_n \leq 1, \tag{A.7}$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_{n-1}$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) |^k \, dx_n \leq \frac{k!}{\lambda^k} \tag{A.8}$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}$.

Comme on le voit sur la définition de $B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)$ si l'on considère $u \in B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)$ comme fonction de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ seulement on a

$$u \in L^p\left(\mathbf{R}^{n-1}; B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R})\right);$$

mais d'après le corollaire 6.2, chap. II, § 1, on a $B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}) \subset L^\infty(\mathbf{R})$; on a aussi évidemment $B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$, d'où par convexité $B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}) \subset L^k(\mathbf{R})$ pour $k \geq n$ et plus précisément, on a

$$\| \Phi \|_{L^k(\mathbf{R})} \leq C \| \Phi \|_{B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R})}$$

pour toute $\Phi \in B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R})$, avec C constante qui ne dépend pas de k; on a donc

$$\left\{ \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | u(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) |^k \, dx_n \right)^{\frac{p}{k}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C \| u \|_{B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)}. \tag{A.9}$$

De (A.8) et (A.9) on déduit par convexité l'inégalité

$$\left\{ \int_{\mathbf{R}^n} | u(x) |^k \, dx \right\}^{\frac{1}{k}} \leq \left\{ \frac{(k!)^{\frac{1}{k}}}{\lambda} \right\}^{1-\frac{p}{k}} \left\{ C \| u \|_{B_\infty^{\frac{n}{p},p}(\mathbf{R}^n)} \right\}^{\frac{p}{k}},$$

i. e. $\left(\text{puisqu'on a } \lambda^{-1} \leq C \| u \|_{B^{\frac{n}{p}, p}_{\infty}(\mathbf{R}^n)}\right)$,

$$\left\{ \int_{\mathbf{R}^n} | u(x) |^k \, dx \right\}^{\frac{1}{k}} \leq C \| u \|_{B^{\frac{n}{p}, p}_{\infty}(\mathbf{R}^n)} (k!)^{\frac{1}{k}\left(1 - \frac{p}{k}\right)}, \tag{A.10}$$

où C ne dépend pas de k.

De (A.10) résulte la majoration

$$\sum_{k \geq p} \frac{\mu^k}{k!} \int_{\mathbf{R}^n} | u(x) |^k \, dx \leq \sum_{k \geq p} \frac{\mu^k}{k!} \left[C \| u \|_{B^{\frac{n}{p}, p}_{\infty}(\mathbf{R}^n)} \right]^k (k!)^{1 - \frac{p}{k}}$$

$$= \sum_{k \geq p} \nu^k (k!)^{-\frac{p}{k}} \leq \sum_{k \geq 1} \nu^k$$

en posant $\nu = \mu C \| u \|_{B^{\frac{n}{p}, p}_{\infty}(\mathbf{R}^n)}$; et par conséquent on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_p (\mu | u(x) |) \, dx \leq 1 \qquad \text{si} \quad \mu C \| u \|_{B^{\frac{n}{p}, p}_{\infty}(\mathbf{R}^n)} \leq \frac{1}{2} \cdot$$

ce qui prouve que $u \in L^{\Phi_p}(\mathbf{R}^n)$ et que

$$| u \|_{L^{\Phi_p}(\mathbf{R}^n)} \leq 2 C \| u \|_{B^{\frac{n}{p}, p}_{\infty}(\mathbf{R}^n)}.$$

Le lemme A.2 est complètement démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. P. Calderon, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method* (*Studia Mathematica*, t. 24, 1964, p. 113-190).

[2] S. Campanato, *Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano* L^p *in* $C^{h,\alpha}$ (*Annali Scuola Norm. sup. Pisa*, vol. 18, 1964, p. 345-360).

[3] N. Dunford et J. T. Schwartz, *Linear operators*, part. I, 1958, Interscience, New York.

[4] P. Grisvard, *Espaces intermédiaires entre espaces de Sobolev avec poids* (*Annali Scuola Norm. sup. Pisa*, vol. 17, 1963, p. 255-296).

[5] P. Grisvard, *Identités entre espaces de traces* (*Math. Scand.*, t. 13, 1963, p. 70-74).

[6] P. Grisvard, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 256, 1963, p. 2745-2748, 2990-2992, 3226-3228; t. 257, 1963, p. 349-352; t. 258, 1964, p. 4900-4902; t.259, 1964, p. 27-29.

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1959.

[8] E. Hille et R. S. Phillips, *Functionnal Analysis and semi-groups* (*Amer. Math. Soc.*, Colloquium Pub., 1957).

[9] V. P. Il'in, *Sur un théorème de Hardy et Littlewood* (*Trudy Mat. Inst. Steklova*, t. 53, 1959, p. 128-144).

[10] M. A. Krasnoselskii et Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz Spaces* (traduit du russe), Noordhoff, 1961.

[11] S. G. Krein, *Sur un théorème d'interpolation dans la théorie des opérateurs* (*Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, t. 130, 1960, p. 491-494).

[12] J. L. Lions, *Une construction d'espaces d'interpolation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1961, p. 1853-1855).

[13] J. L. Lions, *Théorèmes de trace et d'interpolation* (I) *et* (II) (*Annali Scuola Norm. sup. Pisa*, vol. 13, 1959, p. 389-403 et vol. 14, 1960, p. 317-331).

[14] J. L. Lions, *Sur les espaces d'interpolation; dualité* (*Math. Scand.*, t. 9, 1961, p. 147-177).

[15] J. L. Lions, *Théorèmes de trace et d'interpolation*, (IV) (*Math. Ann.*, t. 151, 1963, p. 42-56).

[16] J. L. Lions, *Une propriété de stabilité des espaces d'interpolation; applications* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 855-857).

[17] J. L. Lions, *Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 256, 1963, p. 4343-4345).

[18] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes*, (III) (*Annali Scuola Norm. sup. Pisa*, vol. 15, 1961, p. 39-101).

[19] J. L. Lions et J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation* (*Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, Paris, n° 19, 1964, p. 5-68).

[20] J. L. Lions et J. Peetre, Livre à paraître sur la théorie de l'interpolation.

[21] G. G. Lorentz, *Some new functionnal spaces* (*Ann. Math.*, t. 51, 1950, p. 37-55).

[22] S. G. Mih'lin, *Sur les multiplicateurs des intégrales de Fourier* (*Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, t. 109, n° 4, 1956, p. 701-703).

[23] S. M. Nikolskĭ, *Sur les théorèmes d'immersion de prolongement et d'approximation pour les fonctions différentiables de plusieurs variables* (*Uspehi Mat. Nauk.*, t. 16, 1961, p. 63-114).

[24] S. M. Nikolskiĭ, *Sur les propriétés des traces des fonctions différentiables de plusieurs variables* (*Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, t. 146, n° 3, 1962, p. 542-545).

[25] S. M. Nikolskiĭ, *Fonctions dont une dérivée mixte dominante vérifie une condition de Hölder multiple* (*Sibirskiĭ Mat. J.*, t. 4, 1963, p. 1342-1364).

[26] M. Pagni, *Problemi al contorno per una certa classe di equazioni lineari alle derivate parziali* (*Atti del Sem. Mat. e Fisico dell'Univ. di Modena*, vol. 13, 1964, p. 120-163).

[27] J. Peetre, *Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation* (*Ric. di Mat.*, t. 12, 1963, p. 248-261).

[28] J. Peetre, *Nouvelles propriétés d'espaces d'interpolation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1424-1426).

[29] M. Riesz, *Sur les maxima des formes linéaires et sur les fonctionnelles bilinéaires* (*Acta Math.*, t. 49, 1927, p. 465-497).

[30] V. A. Solonnikov, *Estimations* a priori *pour les équations de type parabolique du second ordre* (*Trudy Mat. Inst. Steklova*, t. 60, 1964, p. 133-212).

[31] G. Stampacchia, $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$ *spaces and interpolation* (*Comm. on pure and applied Math.*, vol. 17, n° 3, 1964, p. 293-306).

[32] E. M. Stein, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 6 B, n° 6, 1962, p. 577-582).

[33] M. H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidian n Space* (*J. Math. and Mech.*, vol. 13, n° 3, 1964, p. 407-479).

[34] G. O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz* (*Comm. Sem. Math. Univ. Lund*, n° 4, 1939).

[35] S. V. Uspenskiĭ, *Théorèmes d'immersion pour les classes* W_p^r *généralisées de S. L. Sobolev* (*Sibirskiĭ Mat. J.*, t. 3, 1962, p. 418-445).

[36] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.

(Manuscrit reçu le 2 février 1965.)

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 143

CHAPITRE O. — RAPPEL DES PRINCIPAUX RÉSULTATS DE L'INTERPOLATION.

1. Les procédés d'interpolation réels et complexes 146
2. L'interpolation dans les espaces de Lebesgue, de Lorentz et de Sobolev 150

CHAPITRE I. — COMMUTATIVITÉ DES PROCÉDÉS D'INTERPOLATION RÉELS ET COMPLEXES.

1. Introduction 154
2. Un critère de commutativité 155
3. Espaces intermédiaires entre un espace de Banach et le domaine d'une puissance d'un opérateur linéaire fermé non borné dans cet espace 158
4. Une situation générale dans laquelle les critères de commutativité s'appliquent ... 168
5. Espaces $B_{\eta}^{\gamma, E}$ 171
6. Un exemple 176
7. Extension des résultats des nos 3 et 4 au cas de plusieurs opérateurs commutatifs ... 180
8. Une variante des résultats du no 7 188
9. Application aux espaces de Sobolev en plusieurs variables 191
10. Quelques théorèmes d'interpolation 197

CHAPITRE II. — ÉTUDE DE CERTAINS PROBLÈMES DE TRACES.

1. *Traces de certains espaces fonctionnels définis par interpolation.*

1. Préliminaires 209
2. Traces des espaces $W^{m, L_{\alpha}^{p}(E)}$ (m entier) 211
3. Traces des espaces $W^{S, L_{\alpha}^{p}(E)}$ (S non entier) 221
4. Traces des espaces $H^{S, L_{\alpha}^{p}(E)}$ définis par interpolation complexe 229
5. Applications aux espaces de Sobolev 236
6. Un complément 239

2. *Espaces de traces à plusieurs variables.*

1. Introduction 243
2. Traces des espaces $W_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{r}, p}(A_0, A_1)$ 244
3. Traces des espaces $W_{\eta}^{m}(p_0, \alpha_0, A_0; p_1, \alpha_1, A_1)$ 250
4. Conditions de compatibilité entre les traces sur divers sous-espaces 260

APPENDICE I 279
APPENDICE II 282
BIBLIOGRAPHIE 288

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Représentation du groupe uni-modulaire réel

Vu et approuvé :

Paris, le 11 mai 1965.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

169302-66

Dépôt légal, Imprimeur, 1966, n° 1749.

Imprimé en France

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55
169302-66

Dépôt légal, Imprimeur, 1966, n° 1749

Imprimé en France